

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2026

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

14 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

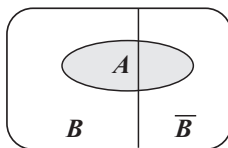
Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

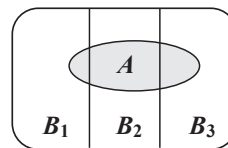
Probabilidade

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Introdução à inferência estatística

Teorema Limite Central

Recolhendo uma amostra aleatória de dimensão n ($n \geq 30$) de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ , a distribuição de amostragem da média dessa amostra, $\bar{X}$, pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left[\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Numa escola, o clube Navega em Segurança é gerido por um grupo de oito alunos, eleitos por meio de um processo eleitoral. Na última eleição, os candidatos organizaram-se nas listas X, Y, Z e W. A definição do número de representantes de cada lista na gestão do clube resultou da conversão de votos em mandatos, utilizando o método a seguir descrito.

- Divide-se o número de votos de cada lista, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc.
- Ordenam-se os quocientes obtidos, por ordem decrescente, numa série de tantos termos quantos os mandatos previstos.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de ficar somente um mandato por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e correspondentes a listas diferentes, o mandato é atribuído à lista que tiver menor número de votos.

Na Tabela 1, apresentam-se os quocientes obtidos por aplicação do método descrito, com arredondamento às décimas.

Tabela 1

		Listas			
		X	Y	Z	W
Divisores	1	100	12	120	85
	2	50	6	60	42,5
	3	33,3	4	40	28,3
	4	25	3	30	21,3
	5	20	2,4	24	17

* 1.1. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Nesta votação, o número total de votos, incluindo brancos e nulos, pode ter sido (a).

O candidato eleito em quarto lugar, por aplicação do método descrito, pertence à lista (b).

Neste ato eleitoral, dos oito mandatos, (c) foram atribuídos à lista X e (d) foram atribuídos à lista W.

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 170	(1) Y	(1) dois	(1) dois
(2) 270	(2) Z	(2) três	(2) três
(3) 370	(3) W	(3) quatro	(3) quatro

*** 1.2.** Uma das listas impugnou o ato eleitoral, sendo necessário repetir a votação.

Apurados os resultados, verificou-se que:

- o número de votos validamente expressos na lista Y aumentou, não se registrando alterações nas listas X, Z e W;
- o clube passou a ser gerido por dois representantes de cada uma das quatro listas.

No mínimo, quantos votos a mais, validamente expressos, obteve a lista Y neste novo ato eleitoral?

Na sua resposta, apresente a ordenação dos oito quocientes relevantes para a atribuição de dois mandatos a cada uma das quatro listas.

2. O jornal de uma escola promoveu um concurso para escolher a melhor reportagem subordinada ao tema «Partilhar notícias falsas? Não caia nessa armadilha!». A Ana, o Bruno e o Carlos realizaram, em conjunto, a reportagem vencedora, à qual foi atribuído um prémio constituído por dois bens: um *tablet* e uma máquina fotográfica.

Para dividirem o prémio entre si, os três alunos resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos alunos atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos bens, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três alunos são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada aluno e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada aluno considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos dois bens.
- Cada bem é atribuído ao aluno que mais o valoriza, considerando-se que o aluno recebe o valor monetário que atribuiu ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um aluno não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor dos bens recebidos por esse aluno é zero euros.
- Seguidamente, caso o valor dos bens recebidos por um aluno seja superior ao valor que este considera justo receber, o aluno disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso esse valor seja inferior, o aluno recebe o valor em falta, em dinheiro, retirado do montante disponibilizado pelos alunos que pagaram.
- Após os procedimentos anteriores, caso sobre dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três alunos.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada um dos alunos aos bens, nas licitações secretas.

Tabela 2

Bens Alunos	Bens	
	<i>Tablet</i>	Máquina fotográfica
Ana	100	140
Bruno	180	30
Carlos	75	75

Indique a distribuição do prémio pelos três alunos, aplicando o método descrito.

Na sua resposta, apresente os valores monetários a pagar ou a receber por cada aluno, concluída a aplicação do método descrito.

- * 3. O Francisco contraiu um crédito, no valor de 1200 euros, para comprar um computador, com as condições seguintes: taxa de juro mensal de 1,5% e prestações mensais fixas, no valor de 350 euros.

Para calcular o capital em dívida no final de cada mês, o Francisco adicionou, ao capital ainda em dívida, o juro aplicado a esse capital e deduziu o valor da prestação mensal.

A última prestação a pagar, a chamada prestação de acerto, será igual ao capital em dívida, no penúltimo mês, acrescido do valor obtido por aplicação da taxa de juro a esse capital. O valor da última prestação poderá ser inferior a 350 euros.

Em cálculos intermédios, quando procedeu a arredondamentos, o Francisco conservou duas casas decimais.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Ao apurar o capital em dívida decorrido um mês desde o início do crédito, o Francisco verificou que o valor, em euros, relativo ao juro foi igual a (a). Verificou ainda que, no decorrer do pagamento do empréstimo, o valor, em euros, referente ao juro mensal (b).

O Francisco amortizou o empréstimo num período de (c) meses, sendo a prestação final de (d) euros.

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 5,25	(1) se manteve	(1) três	(1) 161,01
(2) 12,75	(2) diminuiu	(2) quatro	(2) 188,99
(3) 18	(3) aumentou	(3) cinco	(3) 191,82

- * 4. O Clube Navega em Segurança preparou uma exposição de trabalhos realizados pelos alunos da escola, subordinados a seis temas diferentes.

O espaço da exposição foi organizado em sete áreas: uma dedicada à apresentação das atividades do clube (A) e outras seis destinadas à exposição dos trabalhos referentes aos seis temas abordados (T1, T2, T3, T4, T5 e T6). Entre as diferentes áreas, foram definidos pontos de passagem que permitiam a circulação entre elas.

Na Figura 1, apresenta-se uma planta simplificada do espaço da exposição, com os respectivos pontos de passagem.

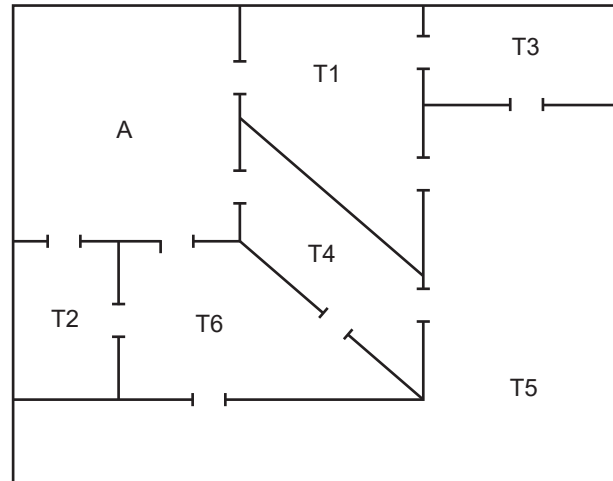


Figura 1

O presidente do clube quis definir um percurso, com início e fim na área de apresentação das atividades do clube (A), atravessando todos os pontos de passagem e entrando em todas as áreas, sem atravessar nenhum ponto de passagem mais de uma vez.

Tendo verificado que esse objetivo não podia ser posto em prática, foi criado mais um ponto de passagem entre duas das áreas para se poder cumprir o objetivo.

Indique, justificando, entre que áreas foi criado o novo ponto de passagem.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que modele a situação descrita;
- uma razão que assegure o cumprimento do objetivo com a criação desse novo ponto de passagem.

5. Uma notícia foi publicada num sítio na Internet. A monitorização do número de leitores dessa notícia decorreu por um período de 24 horas.

Admita que, t horas depois do início da monitorização, o número de leitores da notícia, em milhares, é dado aproximadamente por

$$N(t) = \frac{36}{1 + 17 \times e^{-0,5t}}$$

em que $t = 0$ corresponde ao instante em que teve início a monitorização do número de leitores da notícia.

- * 5.1. Indique, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira.

«Dez horas após o início da monitorização, o número de leitores era trinta vezes maior.»

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

- * 5.2. Houve um momento em que o número de leitores da notícia foi 12 000.

Algum tempo depois desse momento, o número de leitores já tinha aumentado 50%.

A qual dos intervalos seguintes pertence o tempo decorrido, em horas, entre esses dois momentos?

(A) $]1,1; 1,3[$

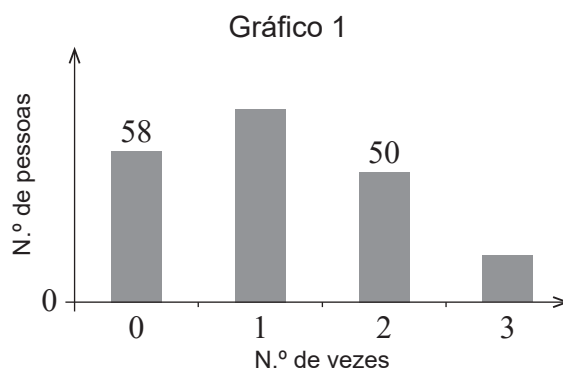
(B) $]1,3; 1,5[$

(C) $]1,5; 1,7[$

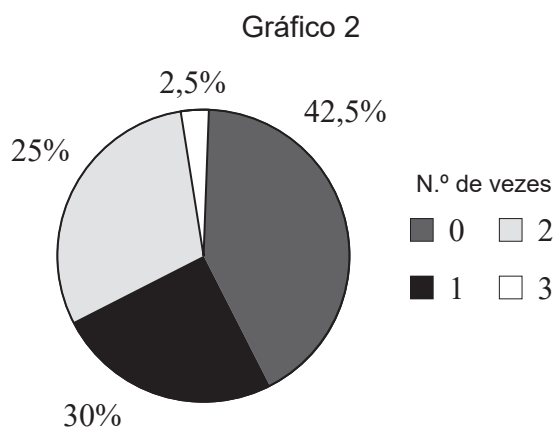
(D) $]1,7; 1,9[$

6. Um conjunto de 600 pessoas que estão registadas nas redes sociais P, Q e R participou num estudo sobre literacia digital, tendo respondido à pergunta «Qual é o número de vezes que, no último mês, verificou as suas configurações de segurança?». As pessoas foram divididas em três grupos de 200 pessoas, tendo cada uma delas respondido à pergunta formulada relativamente a uma, e apenas uma, das redes sociais, ou a rede social P, ou a rede social Q, ou a rede social R.

No Gráfico 1, estão parcialmente registados os dados recolhidos junto das 200 pessoas que se pronunciaram acerca da rede social P.



No Gráfico 2, apresentam-se os dados recolhidos junto das 200 pessoas que se pronunciaram acerca da rede social Q.



Na Tabela 3, estão parcialmente registados os dados recolhidos junto das 200 pessoas que se pronunciaram acerca da rede social R.

Tabela 3

N.º de vezes	N.º de pessoas
0	45
1	
2	55
3	

- * **6.1.** Admita que a moda das respostas relativas à rede social P é igual à moda das respostas relativas à rede social R.

Qual dos valores seguintes é admissível para o número de pessoas que, de entre as 200 que se pronunciaram acerca da rede social R, responderam 1 à pergunta formulada?

(A) 46 (B) 54 (C) 85 (D) 117

- * **6.2.** Complete o texto seguinte, seleccionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção seleccionada.

O número de pessoas que responderam 2 à pergunta formulada é igual nas redes sociais (a) . Considerando as respostas dadas relativamente à rede social R, a percentagem de pessoas que responderam 0 à pergunta formulada é igual a (b) .

Considerando as respostas dadas relativamente à rede social P, e no que diz respeito ao segundo quartil (Q2) e ao terceiro quartil (Q3), é possível afirmar que (c) .

Admita que, das 600 pessoas, 204 responderam 1 à pergunta formulada. Nestas condições, o valor da média do número de vezes que, no último mês, as 600 pessoas verificaram as configurações de segurança da sua conta é, com arredondamento às décimas, igual a (d) .

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) P e Q	(1) 29	(1) $Q2 = Q3 = 1$	(1) 1,1
(2) P e R	(2) 25	(2) $Q2 = 1$ e $Q3 = 2$	(2) 1,3
(3) Q e R	(3) 22,5	(3) $Q2 = Q3 = 2$	(3) 1,5

- * 7. Na Figura 2, está apresentado um programa, em linguagem Python, desenvolvido para simular lançamentos de uma moeda cujas faces são designadas por «cara» e «coroa». O programa calcula e exibe a frequência absoluta de «cara» e de «coroa», depois de solicitar ao utilizador o número de lançamentos pretendidos.

```
import random

n = 0
# Repete enquanto o utilizador não digitar um número maior do que zero
while n <= 0:
    n = int(input("Quantos lançamentos (número inteiro positivo)? "))

cara = 0
coroa = 0

for _ in range(n):
    if random.randint(0, 1) == 0:
        cara += 1
    else:
        coroa += 1

print(f"Número de caras: {cara}")
print(f"Número de coroas: {coroa}")
```

Figura 2

Com o objetivo de obter ainda a percentagem de «caras», foi adicionada ao programa uma linha de código. Qual das linhas de código seguintes cumpre esse objetivo?

- (A) `print(f"Percentagem de caras: {(cara / coroa) * 100:}%")`
- (B) `print(f"Percentagem de caras: {(coroa / cara) * 100:}%")`
- (C) `print(f"Percentagem de caras: {(n / cara) * 100:}%")`
- (D) `print(f"Percentagem de caras: {(cara / n) * 100:}%")`

8. Um dado cúbico equilibrado tem as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se este dado uma vez.

Seja X a variável aleatória «número de vezes que sai a face 1».

Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X .

Apresente os valores das probabilidades na forma de fração irredutível.

9. Uma empresa realiza auditorias a redes sociais com o objetivo de identificar a divulgação de notícias falsas.

* 9.1. Num determinado período de tempo, das 120 notícias falsas divulgadas nas redes sociais, verificou-se que:

- 78 foram divulgadas na rede social P;
- 15 não foram divulgadas nem na rede social P nem na rede social Q.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Das 120 notícias falsas analisadas, ____ (a) ____ foram divulgadas na rede social P ou na rede social Q, e ____ (b) ____ foram divulgadas somente na rede social Q.

Escolhe-se, ao acaso, uma das notícias analisadas.

A probabilidade de essa notícia ter sido divulgada na rede social P é igual a ____ (c) ____ ; se a probabilidade de essa notícia ter sido divulgada somente na rede social P for 35%, então, das notícias analisadas, ____ (d) ____ foram divulgadas em ambas as redes sociais.

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 63	(1) 63	(1) 0,65	(1) 36
(2) 93	(2) 42	(2) 0,525	(2) 15
(3) 105	(3) 27	(3) 0,425	(3) 27

9.2. Após uma auditoria à rede social R, concluiu-se que:

- 20% das notícias divulgadas eram falsas;
- 90% das notícias falsas foram contestadas;
- 5% das notícias verdadeiras foram contestadas.

Considerando, ao acaso, uma notícia divulgada nessa rede social, sabe-se que a mesma não foi contestada.

Determine a probabilidade de essa notícia ser falsa.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

10. Um instituto de pesquisa realizou um levantamento sobre o tempo diário, em minutos, que os indivíduos dedicam à leitura de notícias *online*. Nas suas conclusões, verificou-se que a média populacional do tempo de leitura é 40 minutos e que o desvio padrão populacional é 10 minutos.

Selecionou-se, ao acaso, uma amostra de 100 alunos de uma escola, que foram questionados sobre o tempo que dedicam à leitura de notícias *online*.

Determine o valor aproximado da probabilidade de a média amostral do tempo de leitura de notícias *online* daqueles alunos ser superior a 43 minutos.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.	7.	9.1.	Subtotal
Cotação (em pontos)	15	19	15	19	19	15	15	15	15	15	162
Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.		8.			9.2.		10.		Subtotal	
Cotação (em pontos)	2 x 19 pontos										38
TOTAL											200

Prova 835
Época Especial