

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2026

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Entrelinha 1,5 sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

13 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 3, 3\right)$, tangente ao plano xOy , no ponto A , e tangente ao plano xOz , no ponto B .

Item obrigatório

- 1.1. Qual das equações seguintes define a superfície esférica?

(A) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$

(B) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{73}{4}$

(C) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = \frac{73}{4}$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Item obrigatório

- 1.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja α o plano que passa no ponto de coordenadas $(4, 3, -5)$ e é perpendicular à reta AB .

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta AB com o plano α .

Item obrigatório

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x^2}$.

Estude a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **3.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **3.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

Item obrigatório

3.(AE2018)

Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n}$?

- (A) 1
- (B) 6
- (C) e^5
- (D) e^6

Item obrigatório

3.(AE2023)

A Inês depositou 5740 euros numa instituição financeira, na modalidade de juro composto, capitalizado mensalmente, à taxa de juro anual de 2% .

Durante dois anos, a Inês não fez nenhum levantamento nem nenhum depósito.

Qual foi o capital acumulado, em euros, arredondado às unidades, obtido pela Inês, no final dos dois anos?

- (A) 5970
- (B) 5972
- (C) 5973
- (D) 5974

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2} - 1}{x^2 - 4} & \text{se } x < -2 \\ 2e^{x+2} + 3e^{-x-2} & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1., 4.2. e 4.3. sem recorrer à calculadora.

Item obrigatório

4.1. Averigue se a função f é contínua em $x = -2$.

4.2. Resolva, no intervalo $[0, +\infty[$, a equação $f(x - 2) = 7$.

4.3. Considere, em referencial o.n. Oxy , a reta t , tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $-2 + \ln a$, com $a \in]1, +\infty[$.

Determine o valor de a , sabendo que a reta t é paralela ao eixo Ox .

Item obrigatório

5. Para estudar a associação entre o Produto Interno Bruto (PIB) real *per capita* de um país e a quantidade de gases com efeito de estufa (GEE) emitidos *per capita* nesse país, recolheram-se os dados relativos a 2021 de nove países europeus, apresentados na tabela seguinte.

A segunda coluna (x) diz respeito ao Produto Interno Bruto real *per capita*, em milhares de euros, e a terceira coluna (y) diz respeito à quantidade de gases com efeito de estufa emitidos *per capita*, em tCO₂eq.

O coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis, r , é tal que $r^2 \approx 0,867$.

Admita que a relação entre as variáveis x e y é, aproximadamente linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação $y = 0,115x + 4,188$.

Países	(x)	(y)
A	35,48	9,1
B	21,31	7,6
C	23,45	6,1
D	50,01	7,5
E	70,53	12,3
F	84,49	14,7
G	41,86	9,6
H	18,06	5,5
I	9,61	6,0

Complete cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Em 2021, o PIB real *per capita* do país I foi, aproximadamente, (a) do PIB real *per capita* do país F (valor arredondado às unidades).

- (1) 9%
- (2) 11%
- (3) 13%

Relativamente à distribuição dos valores do PIB real *per capita* apresentados na tabela, existem exatamente (b) países com PIB real *per capita* menor do que a média dessa distribuição.

- (1) 5
- (2) 6
- (3) 7

De acordo com os dados apresentados, verifica-se uma correlação linear (c) entre o PIB real *per capita* e as emissões de GEE *per capita*.

- (1) negativa forte
- (2) positiva fraca
- (3) positiva forte

Sabe-se que, em 2021, o PIB real *per capita* de um determinado país europeu foi 32,53 milhares de euros. Tendo em conta o modelo apresentado, estima-se que, nesse ano, a quantidade de GEE emitidos *per capita* nesse país, na unidade considerada, tenha sido (d) (valor arredondado às décimas).

- (1) 7,9
- (2) 8,3
- (3) 11,6

6. Numa turma do 12.º ano, há alunos que gostam de futebol e alunos que gostam de voleibol.

Item obrigatório

6.1. Nove dos alunos dessa turma vão assistir a um jogo de futebol num camarote constituído por uma fila com 9 cadeiras.

A Susana, o Tomás, o Xavier e a Vânia são quatro desses alunos.

De quantas formas diferentes se podem sentar os nove alunos nas nove cadeiras, ficando a Susana, o Tomás e o Xavier juntos nas três cadeiras centrais e a Vânia numa das extremidades da fila?

- (A) 240
- (B) 720
- (C) 1440
- (D) 4320

6.2. Relativamente aos alunos dessa turma, sabe-se que:

- 80% gostam de futebol;
- 16% gostam de voleibol e não gostam de futebol;
- dos que gostam de futebol, 7 em cada 10 não gostam de voleibol.

Seleciona-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Determine a probabilidade de esse aluno não gostar de futebol, sabendo que não gosta de voleibol.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **7.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **7.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

Item obrigatório

7.(AE2018)

Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(B) = 0,7$;
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cup \overline{B}) = 0,1$.

Determine o valor de $P(A \cap B)$.

Apresente o resultado na forma de dízima.

Item obrigatório

7.(AE2023)

Uma caixa contém cinco cartões, numerados de 1 a 5 .

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, três cartões da caixa.

Seja X a variável aleatória «número de cartões numerados com um número menor do que 3 , no conjunto dos três cartões retirados».

Determine o valor médio da variável X .

Apresente o resultado na forma de dízima.

8. Considere uma circunferência de centro O e raio 4 .

Sejam A e B dois pontos pertencentes à circunferência tais que o comprimento do arco menor AB é $\frac{8\pi}{3}$.

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Item obrigatório

9. Uma sonda meteorológica, com um paraquedas, é largada de um balão e cai segundo uma trajetória vertical até chegar ao solo.

Admita que, no seu movimento de queda, t segundos após ser largada, a distância da sonda ao solo, em metros, é dada por

$$y(t) = 3000 - 320\left(e^{-\frac{7}{40}t} - 1\right) - 56t, \quad t \geq 0$$

Apresente uma equação que permita determinar o tempo que a sonda demora a percorrer $\frac{2}{3}$ do comprimento da sua trajetória de queda.

Item obrigatório

10. Considere três números reais, a , b e c , tais que $0 < a < b < c$.

Seja f uma função, de domínio $[0, c]$, duas vezes diferenciável, e seja f' a função derivada da função f .

Sabe-se que:

- a é o único zero da função f' ;
- f' é estritamente decrescente no intervalo $[0, b]$ e estritamente crescente no intervalo $[b, c]$.

Considere as proposições seguintes.

- I. O gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $[b, c]$.
- II. A função f é estritamente decrescente no intervalo $[0, a]$.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

11.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **11.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **11.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

11.(AE2018)

Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- a função f é contínua e é ímpar;
- $f(1) = -2$;
- a função g é definida por $g(x) = e^{2x} - f(x)$.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função g intersecta a reta de equação $y = 2$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $] -1, 1 [$.

11.(AE2023)

Considere a função f , de domínio $[-3, +\infty[$, contínua, definida por

$$f(x) = e^{2x} - \sqrt{x+3}$$

A equação $f(x) = 2$ tem, exatamente, uma solução pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

Determine, usando o método da bissecção, uma aproximação dessa solução, com erro inferior a $0,1$.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

Item obrigatório

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Qual dos seguintes números complexos é igual a iz ?

(A) $\bar{z}$

(B) $-\bar{z}$

(C) $-z^2$

(D) z^2

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = -\sqrt{3} + i$.

O número w é uma das raízes cúbicas de um número complexo z .

Determine o número real negativo x para o qual o número complexo $\frac{z-x}{i^{23}}$ tem módulo 9.

Item obrigatório

14. Considere a função f , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = k \cos x$, com $k \in \mathbb{R}^+$, e os pontos A e B , pertencentes ao gráfico da função f .

Sabe-se que:

- a abscissa do ponto A pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e a abscissa do ponto B excede em $\frac{\pi}{2}$ a abscissa do ponto A ;
- a distância do ponto A ao semieixo positivo Ox excede em 1 a distância do ponto B a esse semieixo;
- $\frac{7\pi}{2}$ é a área do retângulo de diagonal $[AB]$ e lados paralelos, dois a dois, aos eixos coordenados.

Determine o valor de k .

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.1.	12 pontos
1.2.	14 pontos
2.	14 pontos
3.	12 pontos
4.1.	14 pontos
5.	12 pontos
6.1.	12 pontos
7.	14 pontos
9.	14 pontos
10.	14 pontos
12.	12 pontos
14.	14 pontos

Subtotal	158 pontos
-----------------------	-------------------

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

4.2.	14 pontos
4.3.	14 pontos
6.2.	14 pontos
8.	14 pontos
11.	14 pontos
13.	14 pontos

Subtotal	42 pontos
-----------------------	------------------

TOTAL	200 pontos
--------------------	-------------------

Prova 635
Época Especial