REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

EduQA Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2026

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 3, 3\right)$, tangente ao plano xOy, no ponto A, e tangente ao plano xOz, no ponto B.

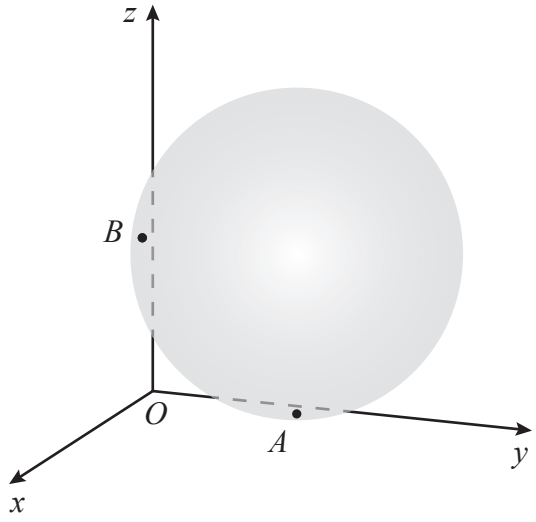

Figura 1

*** 1.1.** Qual das equações seguintes define a superfície esférica?

(A) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$

(B) $x^2+y^2+z^2=\frac{73}{4}$

(C) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\frac{73}{4}$

(D) $x^2+y^2+z^2=9$

*** 1.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja α o plano que passa no ponto de coordenadas $(4, 3, -5)$ e é perpendicular à reta AB.

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta AB com o plano α.

*** 2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=1+\frac{\ln x}{x^2}$.

Estude a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 3.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O **item 3.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
Responda apenas a um dos itens.

*** 3.(AE2018)**

Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n}$?

(A) 1 **(B)** 6 **(C)** e^5 **(D)** e^6

*** 3.(AE2023)**

A Inês depositou 5740 euros numa instituição financeira, na modalidade de juro composto, capitalizado mensalmente, à taxa de juro anual de 2% .

Durante dois anos, a Inês não fez nenhum levantamento nem nenhum depósito.

Qual foi o capital acumulado, em euros, arredondado às unidades, obtido pela Inês, no final dos dois anos?

(A) 5970 **(B)** 5972 **(C)** 5973 **(D)** 5974

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+2}-1}{x^2-4} & \text{se} \quad x < -2 \\ 2e^{x+2} + 3e^{-x-2} & \text{se} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.**, **4.2.** e **4.3.** sem recorrer à calculadora.

*** 4.1.** Averigue se a função f é contínua em $x = -2$.

4.2. Resolva, no intervalo $[0, +\infty[$, a equação $f(x-2) = 7$.

4.3. Considere, em referencial o.n. Oxy , a reta t , tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $-2 + \ln a$, com $a \in]1, +\infty[$.

Determine o valor de a , sabendo que a reta t é paralela ao eixo Ox .

*** 5.** Para estudar a associação entre o Produto Interno Bruto (PIB) real *per capita* de um país e a quantidade de gases com efeito de estufa (GEE) emitidos *per capita* nesse país, recolheram-se os dados relativos a 2021 de nove países europeus, apresentados na tabela seguinte.

Países	**PIB real *per capita* (milhares de euros)** (x)	**GEE *per capita* (tCO_2eq)** (y)
Alemanha	35,48	9,1
Eslovénia	21,31	7,6
Espanha	23,45	6,1
Dinamarca	50,01	7,5
Irlanda	70,53	12,3
Luxemburgo	84,49	14,7
Países Baixos	41,86	9,6
Portugal	18,06	5,5
Roménia	9,61	6,0

Fonte: PORDATA (consultado em outubro de 2025).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Em 2021, o PIB real *per capita* da Roménia foi, aproximadamente, ____**(a)**____ do PIB real *per capita* do Luxemburgo (valor arredondado às unidades).

Relativamente à distribuição dos valores do PIB real *per capita* apresentados na tabela, existem exatamente ____**(b)**____ países com PIB real *per capita* pertencente ao intervalo $]\overline{x}-s, \overline{x}+s[$, em que $\overline{x}$ e s são, respetivamente, a média e o desvio padrão amostral dessa distribuição.

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x obtido a partir dos dados apresentados na tabela, verifica-se uma correlação linear ____**(c)**____ entre o PIB real *per capita* e as emissões de GEE *per capita*. Com base nesse modelo, utilizando as estimativas dos parâmetros arredondadas às milésimas, e sabendo que, em 2021, o PIB real *per capita* da França foi $32{,}53$ milhares de euros, estima-se que, nesse ano, a quantidade de GEE emitidos *per capita* na França, em tCO_2eq, tenha sido ____**(d)**____ (valor arredondado às décimas).

(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**
(1) 9%	**(1)** 6	**(1)** negativa forte	**(1)** $7{,}9$
(2) 11%	**(2)** 7	**(2)** positiva fraca	**(2)** $8{,}3$
(3) 13%	**(3)** 8	**(3)** positiva forte	**(3)** $11{,}6$

6. Numa turma do 12.º ano, há alunos que gostam de futebol e alunos que gostam de voleibol.

*** 6.1.** Nove dos alunos dessa turma vão assistir a um jogo de futebol num camarote constituído por uma fila com 9 cadeiras.

A Susana, o Tomás, o Xavier e a Vânia são quatro desses alunos.

De quantas formas diferentes se podem sentar os nove alunos nas nove cadeiras, ficando a Susana, o Tomás e o Xavier juntos nas três cadeiras centrais e a Vânia numa das extremidades da fila?

(A) 240 **(B)** 720 **(C)** 1440 **(D)** 4320

6.2. Relativamente aos alunos dessa turma, sabe-se que:

- 80% gostam de futebol;
- 16% gostam de voleibol e não gostam de futebol;
- dos que gostam de futebol, 7 em cada 10 não gostam de voleibol.

Seleciona-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Determine a probabilidade de esse aluno não gostar de futebol, sabendo que não gosta de voleibol.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 7.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O **item 7.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
Responda apenas a um dos itens.

*** 7.(AE2018)**

Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- $P(B) = 0{,}7$;
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cup \overline{B}) = 0{,}1$.

Determine o valor de $P(A \cap B)$.

Apresente o resultado na forma de dízima.

*** 7.(AE2023)**

Uma caixa contém cinco cartões, numerados de 1 a 5 .

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, três cartões da caixa.

Seja X a variável aleatória «número de cartões numerados com um número menor do que 3 , no conjunto dos três cartões retirados».

Determine o valor médio da variável X .

Apresente o resultado na forma de dízima.

8. Na Figura 2, está representada uma circunferência de centro O e raio 4.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento $\frac{8\pi}{3}$.

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$.

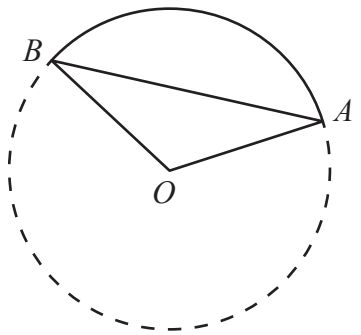

Figura 2

*** 9.** Uma sonda meteorológica, com um paraquedas, é largada de um balão e cai segundo uma trajetória vertical até chegar ao solo.

Admita que, no seu movimento de queda, t segundos após ser largada, a distância da sonda ao solo, em metros, é dada por

$$y(t) = 3000 - 320\left(e^{-\frac{7}{40}t} - 1\right) - 56t\,, \quad t \geq 0$$

Determine, recorrendo à calculadora, quanto tempo demorou a sonda a percorrer $\frac{2}{3}$ do comprimento da sua trajetória de queda.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

*** 10.** Considere três números reais, a, b e c, tais que $0 < a < b < c$.

Seja f uma função, de domínio $[0, c]$, duas vezes diferenciável, e seja f' a função derivada da função f.

Sabe-se que:

- a é o único zero da função f';
- f' é estritamente decrescente no intervalo $[0, b]$ e estritamente crescente no intervalo $[b, c]$.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $[b, c]$.

II. A função f é estritamente decrescente no intervalo $[0, a]$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

11.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 11.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O **item 11.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
Responda apenas a um dos itens.

11.(AE2018)

Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- a função f é contínua e é ímpar;
- $f(1) = -2$;
- a função g é definida por $g(x) = e^{2x} - f(x)$.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy , que o gráfico da função g intersecta a reta de equação $y = 2$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-1, 1[$.

11.(AE2023)

Considere a função f, de domínio $[-3, +\infty[$, contínua, definida por

$$f(x) = e^{2x} - \sqrt{x+3}$$

A equação $f(x) = 2$ tem, exatamente, uma solução pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

Determine, usando o método da bissecção, uma aproximação dessa solução, com erro inferior a $0{,}1$.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

*** 12.** Na Figura 3, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

Os pontos A, B, C e D são os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, respetivamente, e são equidistantes da origem do referencial, O.

Qual dos seguintes números complexos é igual a iz_3 ?

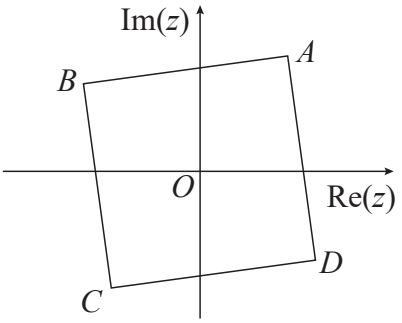

Figura 3

(A) z_2 **(B)** z_4

(C) $\overline{z_2}$ **(D)** $\overline{z_4}$

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = -\sqrt{3} + i$.

O número w é uma das raízes cúbicas de um número complexo z.

Determine o número real negativo x para o qual o número complexo $\frac{z-x}{i^{23}}$ tem módulo 9.

*** 14.** Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy, o gráfico da função f, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = k\cos x$, com $k \in \mathbb{R}^+$, e os pontos A e B, pertencentes ao gráfico da função f.

Sabe-se que:

- a abcissa do ponto A pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e a abcissa do ponto B excede em $\frac{\pi}{2}$ a abcissa do ponto A;
- a distância do ponto A ao semieixo positivo Ox excede em 1 a distância do ponto B a esse semieixo;
- $\frac{7\pi}{2}$ é a área do retângulo de diagonal $[AB]$ e lados paralelos, dois a dois, aos eixos coordenados.

Determine o valor de k.

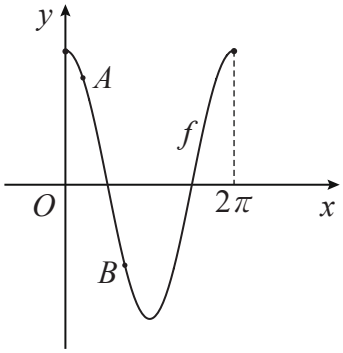

Figura 4

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**5.**	**6.1.**	**7.**	**9.**	**10.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	14	12	12	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.2.**		**4.3.**		**6.2.**		**8.**		**11.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

Época Especial