

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2026
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Entrelinha 1,5 sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

14 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão: (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Item obrigatório

1. Para certos números reais a e b ($a > 1$ e $b > 0$), tem-se $\log_a(b^2) = 16$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$?

(A) -7

(B) -3

(C) 5

(D) 9

2. Seja f uma função real, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, f' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por

$$f'(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$$

Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** sem recorrer à calculadora.

Item obrigatório

2.1. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico da função f , caso este(s) exista(m).

2.2. Considere, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s .

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto A , de coordenadas $(e, 2)$;
- a reta s é perpendicular à reta r e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -3 ;
- a reta s intersecta o eixo Oy no ponto B .

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **3.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **3.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

Item obrigatório

3.(AE2018)

Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$), tais que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4$.

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) 0,4

(B) 0,6

(C) 0,8

(D) 1

Item obrigatório

3.(AE2023)

Admita que o preço de uma refeição, numa cantina, pode ser modelado por uma variável aleatória com distribuição normal, de valor médio 7 euros.

A probabilidade de, nessa cantina, se pagar por uma refeição mais do que 9 euros é igual a 12%.

A Carla almoçou nessa cantina.

Qual é a probabilidade de a Carla ter pagado, pela refeição, um valor entre 7 e 9 euros?

(A) 24%

(B) 38%

(C) 44%

(D) 68%

Item obrigatório

4. O Instituto Nacional de Estatística (INE) realiza, de forma periódica, o Inquérito às Despesas das Famílias, o qual permite analisar o modo como os agregados familiares portugueses distribuem as suas despesas.

Na tabela seguinte, apresentam-se as percentagens da despesa anual média associadas à habitação e à alimentação, em relação à despesa total anual média por agregado familiar, em seis anos do período entre 1989 e 2023. A segunda coluna (x) diz respeito à despesa anual média em habitação, em percentagem, e a terceira coluna (y) à despesa anual média em alimentação, em percentagem.

Admita que a relação entre as variáveis x e y é, aproximadamente linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação $y = -0,648x + 35,006$.

Ano	x	y
1989/1990	12,4	29,5
1994/1995	20,6	21,0
2005/2006	26,6	15,5
2010/2011	29,2	13,3
2015/2016	31,9	14,3
2022/2023	39,0	12,9

Complete cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Relativamente à distribuição das percentagens da despesa anual média associada à habitação, a sua mediana é (a) à sua média.

- (1) inferior
- (2) igual
- (3) superior

De acordo com dados do INE, em 2022/2023, a despesa anual média associada à alimentação foi 3121 euros. Considerando os dados da tabela, em 2022/2023, a despesa anual média associada à habitação, arredondada às unidades, foi (b) euros.

- (1) 1217
- (2) 4338
- (3) 9436

A amplitude interquartil das percentagens da despesa anual média associada à alimentação é _____ **(c)** .

(1) 7,7

(2) 14,9

(3) 16,6

Em 2000, a despesa anual média associada à habitação foi 19,8% da despesa total anual média. De acordo com o modelo apresentado, estima-se que a percentagem da despesa anual média associada à alimentação, em relação à despesa total anual média, em 2000, foi, aproximadamente, _____ **(d)** (valor arredondado às décimas).

(1) 20,2%

(2) 22,2%

(3) 35,0%

5. Considere todos os números naturais com cinco algarismos diferentes.

Determine quantos destes números são múltiplos de 5 e maiores do que 50 000 .

Item obrigatório

6. Numa caixa, estão vários cartões. Cada cartão está numerado com um número inteiro positivo.

Relativamente aos números inscritos nesses cartões, sabe-se que:

- 62,5% são múltiplos de três;
- um terço dos que não são múltiplos de três são pares.

Selecionou-se, ao acaso, um cartão dessa caixa.

Determine a probabilidade de esse cartão estar numerado com um múltiplo de três ou com um número ímpar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **7.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **7.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

Item obrigatório

7.(AE2018)

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_n = \frac{3n + 5}{n + 2}$$

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

Item obrigatório

7.(AE2023)

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 e^x - \frac{1}{2}$.

A função f é contínua e tem exatamente um zero no intervalo $] -2, 0[$.

Determine, pelo método de Newton-Raphson, a aproximação desse zero obtida na primeira iteração, partindo do valor inicial $x_0 = -1$.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

8. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$ do espaço, um cubo e o plano α definido pela equação $-3x + 6y - 2z + 14 = 0$

Sabe-se que:

- uma face do cubo é o quadrado $[ABCD]$, de diagonais $[AC]$ e $[BD]$;
- o ponto A tem coordenadas $(-3, 5, 2)$;
- o plano α é perpendicular à reta AB e contém o ponto B .

Item obrigatório

8.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$
- (B) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
- (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- (D) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} > 0$

Item obrigatório

8.2. Determine o volume do cubo.

9. Considere, em referencial o.n. Oxy do plano, o retângulo $[ABCD]$, tal que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oy ;
- $[AC]$ e $[DB]$ são as diagonais do retângulo $[ABCD]$;
- os pontos B e C pertencem ao primeiro quadrante e à reta de equação $y = -2x + 5$.

Determine as coordenadas do ponto C .

Item obrigatório

10. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, contínua e diferenciável.

Sabe-se que:

- $f(0) = 2$;
- $f(1) \times f(2) < 0$;
- $f'(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Considere as proposições seguintes.

I. $f(1) > 2$.

II. O domínio da função $\frac{1}{f}$ é $\mathbb{R}$.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Item obrigatório

11. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo iz ?

- (A) Primeiro
- (B) Segundo
- (C) Terceiro
- (D) Quarto

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números z e w , tais que $z = \frac{w}{3-4i}$, com $|w| = 5$ e $\operatorname{Re}(w) < 0$.

Sabe-se que $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$.

Determine w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

13.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **13.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **13.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

13.(AE2018)

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f , de domínio $[0, a]$, com $a > 0$, definida por

$$f(x) = \sin(2x) + \cos x$$

Determine o menor valor de a para o qual a função f tem, exatamente, vinte zeros.

13.(AE2023)

Considere o triângulo isósceles $[PQR]$, tal que $\overline{PR} = \overline{PQ}$.

Sejam B , C e S três pontos tais que:

- o ponto S é o ponto médio do segmento de reta $[QR]$;
- o ponto B é o baricentro do triângulo $[PQR]$ e pertence ao segmento de reta $[PS]$;
- o ponto C é o circuncentro do triângulo $[PQR]$ e pertence ao segmento de reta $[BS]$;
- $\overline{PB} = 6$ e $\overline{QR} = 6\sqrt{6}$.

Determine $\overline{CS}$.

Item obrigatório

14. Considere um cone reto, com raio da base r e apótema a , sendo r e a dois números reais positivos, com $r < a$, e dois pontos, A e B , tais que o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro dessa base.

Designando por x o quociente entre o raio da base e o apótema, sabe-se que a distância, d , entre os pontos A e B , pela superfície do cone, é dada pela expressão

$$d(x) = \frac{2r}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \text{ com } x \in]0, 1[$$

Sabe-se que a distância entre os pontos A e B , pela superfície do cone, excede em 40% o diâmetro da base do cone.

Apresente uma equação que lhe permita determinar o quociente entre o raio da base e o apótema desse cone.

15. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, e a reta r , de equação $y = -x + 2$, assíntota ao gráfico da função f .

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$g(x) = f(x) + \frac{x + e^x}{e^x}$$

Determine uma equação da assíntota não vertical ao gráfico da função g .

Item obrigatório

16. Considere, em referencial o.n. Oxy do plano:

- a circunferência de centro na origem, O , e raio 1 ;
- a reta r de equação $x = 1$, tangente à circunferência;
- o ponto A , pertencente à reta r , de ordenada positiva;
- o ponto B , intersecção da reta OA com a circunferência, de abcissa negativa;
- o ponto C de coordenadas $(0, 1)$;
- o ponto D , intersecção da reta BC com a reta r .

Seja α , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, a inclinação da reta OA .

Mostre que

$$\overline{AD} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}$$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.	12 pontos
2.1.	14 pontos
3.	12 pontos
4.	12 pontos
6.	14 pontos
7.	14 pontos
8.1.	12 pontos
8.2.	14 pontos
10.	14 pontos
11.	12 pontos
14.	14 pontos
16.	14 pontos

Subtotal 158 pontos

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

2.2.	14 pontos
5.	14 pontos
9.	14 pontos
12.	14 pontos
13.	14 pontos
15.	14 pontos

Subtotal 42 pontos

TOTAL 200 pontos

Prova 635

2.^a Fase