REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

EduQA Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2026

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Entrelinha 1,5 sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 19 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

1. A cada campeonato mundial de futebol está associada uma mascote. Em quatro desses campeonatos mundiais, as mascotes foram: Willie (W), Juanito (J), Naranjito (N) e Footix (F).

Para eleger a mascote preferida dos alunos de uma escola, cada um dos 900 alunos preencheu um boletim de voto no qual ordenou as quatro mascotes referidas, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma determinada ordenação correspondia a um voto.

Da votação, resultaram apenas quatro listas de preferências. Na Tabela 1, apresentam-se essas listas com o respetivo número de votos.

Tabela 1

Legenda da Tabela 1

p1 – primeira preferência

p2 – segunda preferência

p3 – terceira preferência

p4 – quarta preferência

	N.º de votos			
	220	310	135	235
p1	N	J	F	W
p2	J	N	J	N
p3	W	F	N	J
p4	F	W	W	F

Item obrigatório

1.1. Considere que a eleição da mascote preferida resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de mascotes e atribui-se o número de votos registados em cada coluna à mascote mais bem posicionada, de entre as duas selecionadas.
- Comparam-se os votos obtidos por essas duas mascotes. A mascote com o maior número de votos é a vencedora desse confronto.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até uma das mascotes ter vencido todos os confrontos com as restantes. Essa mascote é a vencedora da eleição e, portanto, é eleita a mascote preferida dos alunos da escola.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Aplicando o método descrito, é possível definir, no máximo, ___(a)___ confrontos entre duas mascotes, escolhidas de entre as quatro disponíveis.
Naranjito (N) foi a mascote eleita como a preferida dos alunos da escola e, no confronto com Juanito (J), Naranjito (N) obteve ___(b)___ votos. No confronto entre Naranjito (N) e Footix (F), este último obteve ___(c)___ votos. Já no confronto com Willie (W), Naranjito (N) venceu por uma diferença de ___(d)___ votos.

(a)

(1) 4

(2) 6

(3) 8

(b)

(1) 455

(2) 590

(3) 765

(c)

(1) 135

(2) 235

(3) 310

(d)

(1) 390

(2) 410

(3) 430

Item obrigatório

1.2. Antes da votação realizada, a Ana criou um programa para averiguar se alguma das mascotes obteria maioria absoluta de votos na primeira preferência, considerando que V era o número total de votos válidos.

Uma das instruções desse programa permitia determinar o número mínimo de votos, M, para que tal acontecesse.

Qual poderá ter sido essa instrução?

(A) M = maior inteiro não superior a (V/2 + 1)

(B) M = (maior inteiro não superior a V/2)

(C) M = V/2

(D) M = V/2 + 1

Item obrigatório

2. Duas agências de venda de bilhetes, a *Blackticket* (BT) e a *Whiteticket* (WT), foram encarregadas da venda da totalidade de bilhetes para os sectores S1, S2, S3 e S4 de um estádio onde irá ocorrer um jogo de um campeonato mundial de futebol.

As duas agências negociaram entre si os sectores cujos bilhetes cada uma poderá vender, utilizando o método que a seguir se descreve.

- Cada agência atribui pontos a cada um dos quatro sectores, secretamente, de acordo com as suas preferências e de modo que o total dos seus pontos seja 100.
- Cada sector é destinado, temporariamente, à agência que mais o valoriza.
- Com esta distribuição, determina-se o total de pontos dos sectores temporariamente destinados a cada agência. Se as duas agências tiverem o mesmo número de pontos, a distribuição temporária torna-se definitiva. Caso contrário, procede-se ao ajuste da partilha, de modo que as agências obtenham o mesmo número total de pontos, através da partilha de um dos sectores.
- Seja A a agência com o total de pontos mais elevado e B a outra agência.
  - A agência A transfere uma parte de um sector para a agência B, até ficarem ambas com o mesmo número de pontos. Para decidir qual o sector a partilhar pelas duas agências, calculam-se os quocientes referentes aos sectores atribuídos à agência A:

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao sector pela agência A}}{\text{Número de pontos atribuídos ao sector pela agência B}}$$

O sector usado para fazer o ajuste, e que será partilhado pelas agências, será aquele a que corresponde o menor quociente.

– Representa-se o total final de pontos a atribuir à agência A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento do valor por ela atribuído ao sector a partilhar.

– Representa-se o total final de pontos a atribuir à agência B pela soma do total temporário dos seus pontos com x por cento do valor por ela atribuído ao sector a partilhar.

– Igualam-se os dois totais finais de modo a determinar o valor de x, que estabelece o equilíbrio da partilha.

– A agência B fica responsável pela venda dos bilhetes do(s) sector(es) a si destinado(s) temporariamente e de x por cento dos bilhetes do sector a partilhar, e a agência A fica com o restante.

Na Tabela 2, estão registados os pontos atribuídos por cada uma das agências aos sectores do estádio de futebol.

Tabela 2

	Sectores			
agências	S1	S2	S3	S4
BT	30	40	8	22
WT	24	45	24	7

Admita que cada um dos sectores do estádio de futebol, S1, S2, S3 e S4, tem 21 000 lugares.

Determine quantos bilhetes para esse jogo do campeonato mundial de futebol estarão à venda na agência *Blackticket*, por aplicação do método descrito.

Na sua resposta:

– apresente a partilha temporária dos sectores pelas agências;

– determine o total de pontos atribuídos aos sectores temporariamente destinados a cada agência;

– indique, justificando, o sector a partilhar pelas duas agências;

– apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a.

Item obrigatório

3. Aproveitando a promoção disponível num sítio da Internet, a Fernanda, dona de uma loja, pretende comprar camisolas de diversas seleções de futebol. Nesse sítio, o preço de cada camisola, sem promoção, é 20 euros. Na Tabela 3, apresenta-se a promoção divulgada nesse sítio.

Tabela 3 – Promoção na compra de um número ímpar de camisolas

N.º de camisolas a comprar	N.º de camisolas a pagar
3	2
5	3
7	4
9	5
11	6
13	7
15	8
17	9
19	10
21	11
(*)	

(*) Em compras superiores a 21 camisolas, mantém-se o padrão relativo ao número de camisolas a pagar.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Em cada compra neste sítio da Internet, a Fernanda pretende escolher sempre a opção mais económica.

Se comprar 16 camisolas, a Fernanda terá de pagar ____(a)____ . Se optar por comprar 21 camisolas, o preço por camisola, arredondado aos cêntimos, será ____(b)____ . Na compra de 17 camisolas, recorrendo à promoção, a Fernanda fará uma poupança de ____(c)____ face à compra das camisolas sem promoção.

A Fernanda deverá comprar um conjunto de ____(d)____ camisolas, para que o preço por camisola seja exatamente 52% do preço de cada camisola comprada individualmente e, portanto, sem promoção.

(a)

(1) 160 €

(2) 180 €

(3) 320 €

(b)

(1) 8,57 €

(2) 9,66 €

(3) 10,48 €

(c)

(1) 160 €

(2) 180 €

(3) 200 €

(d)

(1) 23

(2) 25

(3) 27

Item obrigatório

4. Em 2026, os jogos do campeonato mundial de futebol distribuem-se por diversos estádios, sediados em cidades de três países.

Num sítio da Internet onde se divulga este evento, são apresentadas a Tabela 4 e a Tabela 5.

Na Tabela 4, apresentam-se as cidades onde estão sediados alguns desses estádios e o número máximo de espectadores, em milhares, por estádio, ou seja, a sua capacidade.

Tabela 4

Cidade	Capacidade, em milhares
Vancouver (V)	54
Atlanta (A)	75
Dallas (D)	94
Kansas City (K)	73
Nova Iorque (N)	82,5
Cidade do México (M)	83

Na Tabela 5, apresenta-se a duração, em horas, de voos diretos entre as cidades onde estão sediados os estádios apresentados na Tabela 4.

Tabela 5

Duração de voo entre as cidades	
V–N	6h11
V–M	5h30
A–D	2h45
A–N	2h20
A–M	3h28
D–K	1h42
D–N	3h45
D–M	2h45

A Maria gostaria de conhecer os estádios sediados nas cidades apresentadas na Tabela 4 e decidiu que começaria pelo estádio sediado em Kansas City, por ser a cidade onde vive.

Para definir a ordem pela qual visitará as cidades onde esses estádios estão sediados, a Maria consultou a Tabela 5 e aplicou o método a seguir descrito.

- Seleciona-se a cidade seguinte, tendo em conta que:
  - deverá corresponder à viagem com menor tempo de voo direto;
  - se houver dois tempos de voo iguais entre cidades, escolhe-se a cidade onde está sediado o estádio com maior capacidade.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, sem repetir nenhuma cidade e terminando após a passagem por todas as cidades onde estão sediados os estádios escolhidos pela Maria.

Apresente a ordem pela qual a Maria visitará as cidades.

Na sua resposta, apresente a ordenação da duração dos voos selecionados pelo método descrito.

5. As portas do estádio A, num campeonato mundial de futebol, abriram-se, para a entrada dos espectadores, exatamente duas horas antes do início de um determinado jogo.

Considere que o número de espectadores, em milhares, que estavam dentro desse estádio, t minutos após a abertura das portas e até o jogo se iniciar, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às milésimas.

$$A(t) = -45 + 45 \log_{10}(2t + 10)$$

Item obrigatório

5.1. Escreva uma equação que lhe permita determinar ao fim de quanto tempo, em minutos, após a abertura das portas do estádio A, estavam dentro desse estádio mais 5000 espectadores do que os que lá se encontravam decorridos 14 minutos sobre a abertura das portas.

Item obrigatório

5.2. Num outro estádio, o estádio B, decorreu um jogo que teve início à mesma hora do que o realizado no estádio A. As portas do estádio B abriram-se, para a entrada dos espectadores, um pouco mais cedo do que as portas do estádio A.

Considere que o número de espectadores, em milhares, que entraram no estádio B, em função do tempo t, em minutos, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às milésimas.

$$B(t) = -35 + 35 \log_{10}(t + 50)$$

em que $t = 0$ corresponde ao instante de abertura das portas do estádio A.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Dez minutos depois da abertura das portas do estádio A, encontrava-se nesse estádio um número de espectadores entre ____(a)____ .

Quando o estádio A abriu as portas, no estádio B já tinham entrado entre ____(b)____ espectadores.

O número de espectadores igualou-se em ambos os estádios no instante t1, ou seja, quando se verificou ____(c)____ .

O tempo, em minutos, que decorreu entre a abertura das portas dos estádios A e B correspondeu a um valor situado entre ____(d)____ .

(a)

(1) 19 000 e 19 999

(2) 20 000 e 20 999

(3) 21 000 e 21 999

(b)

(1) 24 000 e 24 999

(2) 25 000 e 25 999

(3) 26 000 e 26 999

(c)

(1) $A(\text{t1}) \times B(\text{t1}) = 0$

(2) $A(\text{t1}) - B(\text{t1}) = 0$

(3) $A(\text{t1}) + B(\text{t1}) = 0$

(d)

(1) 28 e 35

(2) 35 e 42

(3) 42 e 49

6. Ao entrar num estádio onde decorreu um jogo de um campeonato mundial de futebol, cada um dos 50 000 espectadores foi questionado acerca da distância, em quilómetros, entre o estádio e o seu alojamento, e acerca da sua idade, em anos.

As respostas relativas às distâncias, em quilómetros, entre o estádio e o alojamento, organizadas nas classes $[0, 100[$, $[100, 200[$, $[200, 300[$ e $[300, 400[$, apresentam-se, parcialmente, na Tabela 6. Admita que essas distâncias se distribuem uniformemente em cada uma das classes.

Tabela 6

Distância, em km	N.º de espectadores, em centenas
$[0, 100[$	
$[100, 200[$	
$[200, 300[$	151
$[300, 400[$	101

A Tabela 7, parcialmente preenchida, relaciona essas distâncias com as idades dos espectadores, em anos, organizadas nas classes $[5, 30[$, $[30, 55[$ e $[55, 80[$.

Tabela 7

Legenda da Tabela 7

A – Classe $[5, 30[$

B – Classe $[30, 55[$

C – Classe $[55, 80[$

	Idade, em anos		
Distância, em km	A	B	C
$[0, 100[$			30
$[100, 200[$	38	45	25
$[200, 300[$			35
$[300, 400[$			

Da leitura da Tabela 7, é possível verificar, por exemplo, que 30 centenas de espectadores se encontram alojados a uma distância do estádio pertencente à classe $[0, 100[$ e têm idade pertencente à classe $[55, 80[$.

6.1. Determine, em média, a que distância do estádio, em quilómetros, está alojado cada espectador.

__Item obrigatório__

6.2. Admita que 25% dos espectadores têm idades pertencentes à classe $[55, 80[$.

Quantos destes espectadores estão alojados a uma distância superior ou igual a $300\ \mathrm{km}$ do estádio?

(A) 1100

(B) 2250

(C) 3500

(D) 4250

__Item obrigatório__

7. Numa iniciativa promocional de um campeonato mundial de futebol, realizou-se um passatempo no qual uma pessoa era convidada a rodar uma vez uma roleta equilibrada. A roleta estava dividida em seis sectores circulares, numerados, de igual amplitude. Sempre que a roleta parava após ser posta em movimento, o ponteiro indicava um sector. O prémio a atribuir consistia em camisolas das seleções em competição, tantas quantas o número assinalado pelo ponteiro quando a roleta parava.

Seja X a variável aleatória: «número de camisolas ganhas».

A Tabela 8 representa a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X para a roleta que foi utilizada.

Tabela 8

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$

Qual das opções seguintes poderá apresentar a numeração inscrita nos sectores da roleta utilizada?

(A) 0, 0, 0, 1, 1, 1

(B) 0, 0, 1, 1, 1, 2

(C) 0, 1, 1, 1, 1, 2

(D) 0, 0, 1, 1, 2, 2

8. Num campeonato mundial de futebol, ocorreu um jogo entre as seleções de Portugal e de França. Antes de o jogo começar, cada um dos 62 clientes de um restaurante, que se encontravam ou na sala S1 ou na sala S2, indicou qual das seleções preferia que vencesse aquele jogo.

Na Tabela 9, apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 9

	Seleção	
salas	Portugal	França
S1	24	16
S2	14	8

8.1. Escolhem-se aleatoriamente dois dos clientes, um a seguir ao outro, de entre os contabilizados na Tabela 9.

Determine a probabilidade de os dois estarem em salas diferentes e de ambos preferirem que a seleção vencedora fosse a seleção de Portugal.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

8.2. Dos 40 clientes que estavam na sala S1, alguns vestiam um equipamento de uma seleção.

Admita que:

- $\frac{1}{4}$ dos clientes que preferiam que a seleção de França fosse a vencedora vestiam um equipamento de uma seleção;
- $87{,}5\%$ dos clientes que preferiam que a seleção de Portugal fosse a vencedora vestiam um equipamento de uma seleção.

Seleciona-se, ao acaso, um cliente que estava na sala S1 e que vestia um equipamento de uma seleção.

Determine a probabilidade de esse cliente preferir que a seleção de Portugal fosse a vencedora.

Apresente o resultado na forma de dízima.

Item obrigatório

9. Antes do início de um campeonato mundial de futebol, o José consultou um artigo de um jornal desportivo que, entre outros dados, apresentava o intervalo $[0{,}1342; 0{,}2658]$ como sendo um intervalo a 90% de confiança para a proporção de pessoas que consideravam que a seleção vencedora desse campeonato mundial seria a seleção de Portugal.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

A margem de erro do intervalo de confiança apresentado é igual a ____(a)____ . Se o nível de confiança fosse alterado para 95% e os outros parâmetros se mantivessem, a margem de erro seria ____(b)____ .
A média dos extremos do intervalo de confiança apresentado é igual ____(c)____ .
No intervalo de confiança apresentado, a dimensão da amostra é igual a ____(d)____ .

(a)

(1) $0{,}0658$

(2) $0{,}1316$

(3) $0{,}2632$

(b)

(1) menor

(2) igual

(3) maior

(c)

(1) à amplitude do intervalo

(2) à proporção amostral

(3) ao nível de confiança

(d)

(1) 100

(2) 110

(3) 120

10. As bolas de futebol produzidas para um campeonato mundial de futebol obedecem a regras padronizadas de fabrico e controlo de qualidade.

Admita que, num dado processo de fabrico, o raio das bolas pode ser modelado por uma variável com média $10{,}9 \text{ cm}$ e desvio padrão $0{,}54 \text{ cm}$.

Selecionou-se, ao acaso, uma amostra de 81 bolas produzidas para um campeonato mundial de futebol segundo esse processo.

Determine a probabilidade de a média dos raios das bolas da amostra ser superior a $10{,}78 \text{ cm}$.

Apresente o resultado, na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Caso proceda a arredondamento nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.2.</td><td>7.</td><td>9.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>15</td><td>15</td><td>19</td><td>15</td><td>19</td><td>19</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>162</td></tr>
<tr><td>Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="3">6.1.</td><td colspan="2">8.1.</td><td colspan="3">8.2.</td><td colspan="2">10.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="10">2 x 19 pontos</td><td>38</td></tr>
<tr><td colspan="11">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Formulário

Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidade

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P\left(A \cap B_1\right) + P\left(A \cap B_2\right) + P\left(A \cap B_3\right) =$$

$$= P\left(B_1\right) \times P\left(A \mid B_1\right) + P\left(B_2\right) \times P\left(A \mid B_2\right) + P\left(B_3\right) \times P\left(A \mid B_3\right)$$

$$P\left(B_k \mid A\right) = \frac{P\left(A \cap B_k\right)}{P(A)} = \frac{P\left(B_k\right) \times P\left(A \mid B_k\right)}{P\left(B_1\right) \times P\left(A \mid B_1\right) + P\left(B_2\right) \times P\left(A \mid B_2\right) + P\left(B_3\right) \times P\left(A \mid B_3\right)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Introdução à inferência estatística

Teorema Limite Central

Recolhendo uma amostra aleatória de dimensão $n\,(n \geq 30)$ de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ, a distribuição de amostragem da média dessa amostra, $\overline{X}$, pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left[\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$$\left[\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576

Prova 835

1.ª Fase