

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2026

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

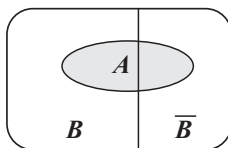
Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

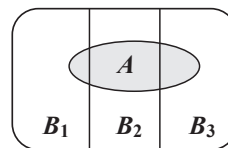
Probabilidade

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Introdução à inferência estatística

Teorema Limite Central

Recolhendo uma amostra aleatória de dimensão n ($n \geq 30$) de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ , a distribuição de amostragem da média dessa amostra, \bar{X} , pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left[\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
n – dimensão da amostra \bar{x} – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
n – dimensão da amostra \bar{x} – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
n – dimensão da amostra \hat{p} – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. A cada campeonato mundial de futebol está associada uma mascote. Em quatro desses campeonatos mundiais, as mascotes foram: Willie (W), Juanito (J), Naranjito (N) e Footix (F).

Para eleger a mascote preferida dos alunos de uma escola, cada um dos 900 alunos preencheu um boletim de voto no qual ordenou as quatro mascotes referidas, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma determinada ordenação correspondia a um voto.

Da votação, resultaram apenas quatro listas de preferências. Na Tabela 1, apresentam-se essas listas com o respetivo número de votos.

Tabela 1

Preferências \ Votos	Votos			
	220	310	135	235
1. ^a	N	J	F	W
2. ^a	J	N	J	N
3. ^a	W	F	N	J
4. ^a	F	W	W	F

* 1.1. Considere que a eleição da mascote preferida resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de mascotes e atribui-se o número de votos registados em cada coluna à mascote mais bem posicionada, de entre as duas selecionadas.
- Comparam-se os votos obtidos por essas duas mascotes. A mascote com o maior número de votos é a vencedora desse confronto.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até uma das mascotes ter vencido todos os confrontos com as restantes. Essa mascote é a vencedora da eleição e, portanto, é eleita a mascote preferida dos alunos da escola.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Aplicando o método descrito, é possível definir, no máximo, (a) confrontos entre duas mascotes, escolhidas de entre as quatro disponíveis.

Naranjito (N) foi a mascote eleita como a preferida dos alunos da escola e, no confronto com Juanito (J), Naranjito (N) obteve (b) votos. No confronto entre Naranjito (N) e Footix (F), este último obteve (c) votos. Já no confronto com Willie (W), Naranjito (N) venceu por uma diferença de (d) votos.

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 4	(1) 455	(1) 135	(1) 390
(2) 6	(2) 590	(2) 235	(2) 410
(3) 8	(3) 765	(3) 310	(3) 430

* 1.2. A Ana resolveu criar um programa para averiguar se, na votação realizada, alguma das mascotes obteve maioria absoluta de votos na primeira preferência. Esse programa, composto por blocos de programação executados de forma sequencial, deve respeitar as etapas seguintes.

1.^a etapa – Solicitar o número de votos em cada mascote na primeira preferência.

2.^a etapa – Determinar o número mínimo de votos para que alguma mascote obtenha maioria absoluta.

3.^a etapa – Verificar se alguma das mascotes obtém maioria absoluta e, nesse caso, dar essa indicação.

4.^a etapa – Caso nenhuma das mascotes obtenha maioria absoluta, dar essa indicação.

Na Figura 1, apresentam-se os blocos de programação, B1, B2, B3 e B4, do programa criado pela Ana para cumprir as etapas definidas.

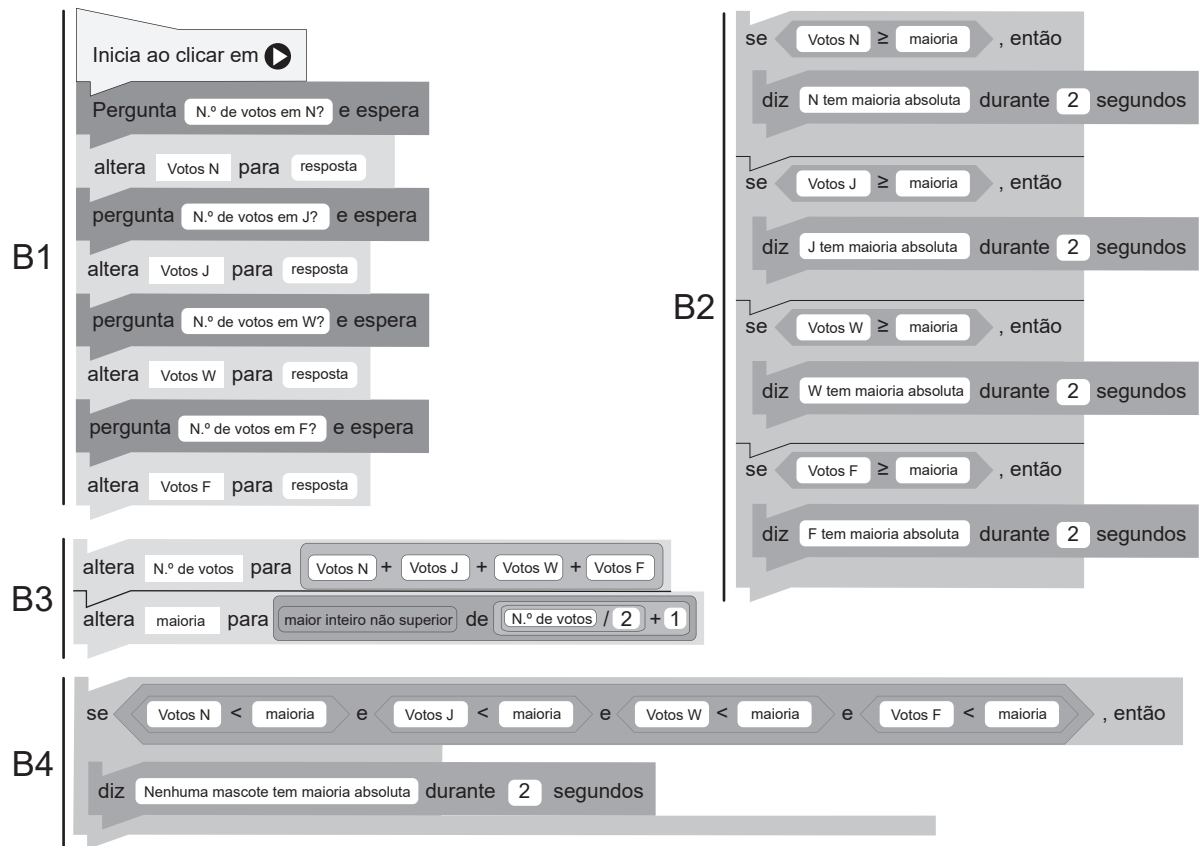


Figura 1

Qual deve ser, no programa criado pela Ana, a sequência dos blocos de programação?

- (A) B1, B2, B3, B4
- (B) B1, B4, B3, B2
- (C) B1, B3, B2, B4
- (D) B1, B4, B2, B3

* 2. Duas agências de venda de bilhetes, a *Blackticket* (BT) e a *Whiteticket* (WT), foram encarregadas da venda da totalidade de bilhetes para os sectores S1, S2, S3 e S4 de um estádio onde irá ocorrer um jogo de um campeonato mundial de futebol.

As duas agências negociaram entre si os sectores cujos bilhetes cada uma poderá vender, utilizando o método que a seguir se descreve.

- Cada agência atribui pontos a cada um dos quatro sectores, secretamente, de acordo com as suas preferências e de modo que o total dos seus pontos seja 100.
- Cada sector é destinado, temporariamente, à agência que mais o valoriza.
- Com esta distribuição, determina-se o total de pontos dos sectores temporariamente destinados a cada agência. Se as duas agências tiverem o mesmo número de pontos, a distribuição temporária torna-se definitiva. Caso contrário, procede-se ao ajuste da partilha, de modo que as agências obtenham o mesmo número total de pontos, através da partilha de um dos sectores.
- Seja A a agência com o total de pontos mais elevado e B a outra agência.
 - A agência A transfere uma parte de um sector para a agência B, até ficarem ambas com o mesmo número de pontos. Para decidir qual o sector a partilhar pelas duas agências, calculam-se os quocientes referentes aos sectores atribuídos à agência A:

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao sector pela agência A}}{\text{Número de pontos atribuídos ao sector pela agência B}}$$

O sector usado para fazer o ajuste, e que será partilhado pelas agências, será aquele a que corresponde o menor quociente.

- Representa-se o total final de pontos a atribuir à agência A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento do valor por ela atribuído ao sector a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir à agência B pela soma do total temporário dos seus pontos com x por cento do valor por ela atribuído ao sector a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais de modo a determinar o valor de x , que estabelece o equilíbrio da partilha.
- A agência B fica responsável pela venda dos bilhetes do(s) sector(es) a si destinado(s) temporariamente e de x por cento dos bilhetes do sector a partilhar, e a agência A fica com o restante.

Na Tabela 2, estão registados os pontos atribuídos por cada uma das agências aos sectores do estádio de futebol.

Tabela 2

Agências \ Sectores	Sectores			
	S1	S2	S3	S4
BT	30	40	8	22
WT	24	45	24	7

Admita que cada um dos sectores do estádio de futebol, S1, S2, S3 e S4, tem 21 000 lugares.

Determine quantos bilhetes para esse jogo do campeonato mundial de futebol estarão à venda na agência *Blackticket*, por aplicação do método descrito.

Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos sectores pelas agências;
- determine o total de pontos atribuídos aos sectores temporariamente destinados a cada agência;
- indique, justificando, o sector a partilhar pelas duas agências;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a.

- * 3. Aproveitando a promoção apresentada na Figura 2, disponível num sítio da Internet, a Fernanda, dona de uma loja, pretende comprar camisolas de diversas seleções de futebol.



Promoção na compra de um número ímpar de camisolas

N.º de camisolas a comprar	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...*
N.º de camisolas a pagar	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

* Em compras superiores a 21 camisolas, mantém-se o padrão relativo ao número de camisolas a pagar.

Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Em cada compra neste sítio da Internet, a Fernanda pretende escolher sempre a opção mais económica.

Se comprar 16 camisolas, a Fernanda terá de pagar **(a)** . Se optar por comprar 21 camisolas, o preço por camisola, arredondado aos cêntimos, será **(b)** . Na compra de 17 camisolas, recorrendo à promoção, a Fernanda fará uma poupança de **(c)** face à compra das camisolas sem promoção.

A Fernanda deverá comprar um conjunto de **(d)** camisolas, para que o preço por camisola seja exatamente 52% do preço de cada camisola comprada individualmente e, portanto, sem promoção.

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 160 €	(1) 8,57 €	(1) 160 €	(1) 23
(2) 180 €	(2) 9,66 €	(2) 180 €	(2) 25
(3) 320 €	(3) 10,48 €	(3) 200 €	(3) 27

- * 4. Em 2026, os jogos do campeonato mundial de futebol distribuem-se por dezasseis estádios, sediados em cidades de três países, o Canadá, os Estados Unidos da América (EUA) e o México.

Num sítio da Internet onde se divulga este evento, são apresentadas a Tabela 3 e a Tabela 4.

Na Tabela 3, apresentam-se o país e a cidade onde estão sediados alguns desses estádios e o número máximo de espectadores por estádio, ou seja, a sua capacidade.

Tabela 3

		Cidade	Capacidade do estádio
		País	Canadá
Vancouver (V)	54 000		
EUA	Atlanta (A)		75 000
	Dallas (D)		94 000
	Filadélfia (F)		69 000
	Kansas City (K)		73 000
	Nova Iorque (N)		82 500
México	Guadalajara (G)		48 000
	Cidade do México (M)		83 000

Na Tabela 4, apresenta-se a duração, em horas, de voos diretos entre as cidades onde estão sediados os estádios apresentados na Tabela 3.

Tabela 4

		Cidade	T	V	A	D	F	K	N	G	M
		País	Canadá	T		4h50	2h16	3h22	1h40		1h50
V	4h50				4h54	4h11			6h11	5h20	5h30
EUA	A		2h16	4h54		2h45	2h09	1h59	2h20	3h35	3h28
	D		3h22	4h11	2h45		3h47	1h42	3h45	2h44	2h45
	F		1h40		2h09	3h47		3h02			5h19
	K				1h59	1h42	3h02		3h56		
	N		1h50	6h11	2h20	3h45		3h56			4h56
México	G		4h45	5h20	3h35	2h44					1h32
	M		5h00	5h30	3h28	2h45	5h19		4h56	1h32	

A Maria, que vive nos EUA, gostaria de conhecer o estádio com maior capacidade de cada um dos três países e, além desses, os que têm uma capacidade acima de 70 000 espectadores. Para escolher os estádios a conhecer, a Maria consultou a Tabela 3.

Escolhidos os estádios que gostaria de conhecer, a Maria decidiu que começaria pelo estádio sediado em Kansas City, por ser a cidade onde vive.

Para definir a ordem pela qual visitará as cidades onde esses estádios estão sediados, a Maria consultou a Tabela 4 e aplicou o método a seguir descrito.

- Seleciona-se a cidade seguinte, tendo em conta que:
 - deverá corresponder à viagem com menor tempo de voo direto;
 - se houver dois tempos de voo iguais entre cidades, escolhe-se a cidade onde está sediado o estádio com maior capacidade.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, sem repetir nenhuma cidade e terminando após a passagem por todas as cidades onde estão sediados os estádios escolhidos pela Maria.

Apresente a ordem pela qual a Maria visitará as cidades.

Na sua resposta, apresente um grafo que resulte da aplicação do método descrito.

5. As portas do estádio A, num campeonato mundial de futebol, abriram-se, para a entrada dos espectadores, exatamente duas horas antes do início de um determinado jogo.

Considere que o número de espectadores, em milhares, que estavam dentro desse estádio, t minutos após a abertura das portas e até o jogo se iniciar, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às milésimas.

$$A(t) = -45 + 45 \log_{10}(2t + 10)$$

- * 5.1. Considere o intervalo de tempo que decorreu entre a abertura das portas do estádio A e o instante em que o número de espectadores que estavam dentro do estádio atingiu os 30 milhares.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, o número de espectadores que já tinham entrado no estádio A a meio desse intervalo de tempo.

Na sua resposta:

- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) visualizado(s) e assinale o(s) ponto(s) relevante(s);
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), com arredondamento às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

- * 5.2. Num outro estádio, o estádio B, decorreu um jogo que teve início à mesma hora do que o realizado no estádio A. As portas do estádio B abriram-se, para a entrada dos espectadores, um pouco mais cedo do que as portas do estádio A.

Considere que o número de espectadores, em milhares, que entraram no estádio B, em função do tempo t , em minutos, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às milésimas.

$$B(t) = -35 + 35 \log_{10}(t + 50)$$

em que $t = 0$ corresponde ao instante de abertura das portas do estádio A.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Dez minutos depois da abertura das portas do estádio A, encontrava-se nesse estádio um número de espectadores entre (a) .

Quando o estádio A abriu as portas, no estádio B já tinham entrado entre (b) espectadores. O número de espectadores igualou-se em ambos os estádios quando tinham decorrido entre (c) minutos após a abertura das portas do estádio A.

O tempo, em minutos, que decorreu entre a abertura das portas dos estádios A e B correspondeu a um valor situado entre (d) .

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 19 000 e 19 999	(1) 24 000 e 24 999	(1) 15 e 16	(1) 28 e 35
(2) 20 000 e 20 999	(2) 25 000 e 25 999	(2) 16 e 17	(2) 35 e 42
(3) 21 000 e 21 999	(3) 26 000 e 26 999	(3) 17 e 18	(3) 42 e 49

6. Ao entrar num estádio onde decorreu um jogo de um campeonato mundial de futebol, cada um dos 50 000 espectadores foi questionado acerca da distância, em quilómetros, entre o estádio e o seu alojamento, e acerca da sua idade, em anos.

As respostas relativas às distâncias, em quilómetros, entre o estádio e o alojamento, organizadas nas classes $[0, 100[$, $[100, 200[$, $[200, 300[$ e $[300, 400[$, apresentam-se, parcialmente, no Gráfico 1. Admita que essas distâncias se distribuem uniformemente em cada uma das classes.

A Tabela 5, parcialmente preenchida, relaciona essas distâncias com as idades dos espectadores, em anos, organizadas nas classes $[5, 30[$, $[30, 55[$ e $[55, 80[$.

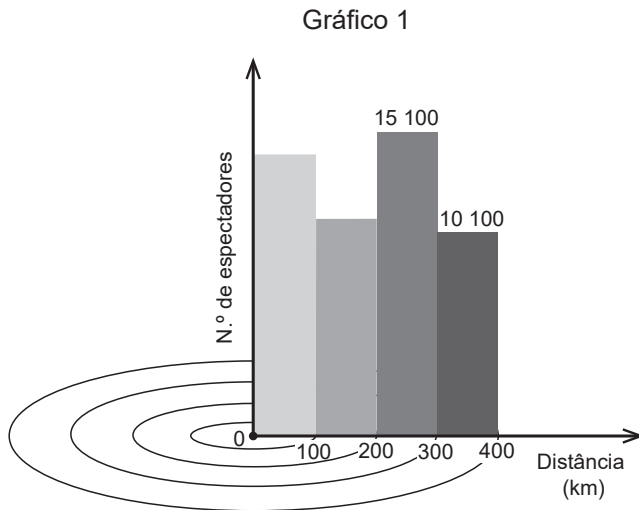


Tabela 5

		Idade (anos)		
		$[5, 30[$	$[30, 55[$	$[55, 80[$
Distância (km)	$[0, 100[$			3000
	$[100, 200[$	3800	4500	2500
	$[200, 300[$			3500
	$[300, 400[$			

- 6.1. Determine, em média, a que distância do estádio, em quilómetros, está alojado cada espectador.

- * 6.2. Admita que 25% dos espectadores têm idades pertencentes à classe $[55, 80[$.

Quantos destes espectadores estão alojados a uma distância superior ou igual a 300 km do estádio?

- (A) 1100
 (B) 2250
 (C) 3500
 (D) 4250

* 7. Numa iniciativa promocional de um campeonato mundial de futebol, realizou-se um passatempo no qual uma pessoa era convidada a rodar uma vez uma roleta equilibrada. A roleta estava dividida em seis sectores circulares, numerados, de igual amplitude. Sempre que a roleta parava após ser posta em movimento, o ponteiro indicava um sector. O prémio a atribuir consistia em camisolas das seleções em competição, tantas quantas o número assinalado pelo ponteiro quando a roleta parava.

Seja X a variável aleatória: «número de camisolas ganhas».

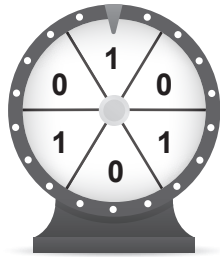
A Tabela 6 representa a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X para a roleta que foi utilizada.

Tabela 6

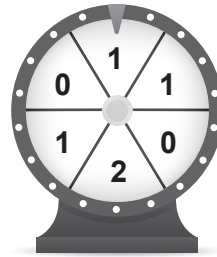
x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Qual das roletas seguintes poderá ter sido a utilizada?

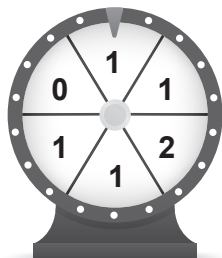
(A)



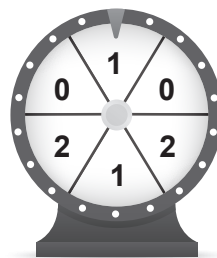
(B)



(C)



(D)



8. Num campeonato mundial de futebol, ocorreu um jogo entre as seleções de Portugal e de França. Antes de o jogo começar, cada um dos 62 clientes de um restaurante, que se encontravam ou na sala S1 ou na sala S2, indicou qual das seleções preferia que vencesse aquele jogo.

Na Tabela 7, apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 7

Salas	Seleção	Portugal	França
S1		24	16
S2		14	8

- 8.1. Escolhem-se aleatoriamente dois dos clientes, um a seguir ao outro, de entre os contabilizados na Tabela 7.

Determine a probabilidade de os dois estarem em salas diferentes e de ambos preferirem que a seleção vencedora fosse a seleção de Portugal.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

- 8.2. Dos 40 clientes que estavam na sala S1, alguns vestiam um equipamento de uma seleção.

Admita que:

- $\frac{1}{4}$ dos clientes que preferiam que a seleção de França fosse a vencedora vestiam um equipamento de uma seleção;
- 87,5% dos clientes que preferiam que a seleção de Portugal fosse a vencedora vestiam um equipamento de uma seleção.

Seleciona-se, ao acaso, um cliente que estava na sala S1 e que vestia um equipamento de uma seleção.

Determine a probabilidade de esse cliente preferir que a seleção de Portugal fosse a vencedora.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- * 9. Antes do início de um campeonato mundial de futebol, o José consultou um artigo de um jornal desportivo que, entre outros dados, apresentava o intervalo $[0,1342; 0,2658]$ como sendo um intervalo a 90% de confiança para a proporção de pessoas que consideravam que a seleção vencedora desse campeonato mundial seria a seleção de Portugal.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

A margem de erro do intervalo de confiança apresentado é igual a (a) . Se o nível de confiança fosse alterado para 95% e os outros parâmetros se mantivessem, a margem de erro seria (b) .

A média dos extremos do intervalo de confiança apresentado é igual (c) .

No intervalo de confiança apresentado, a dimensão da amostra é igual a (d) .

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 0,0658	(1) menor	(1) à amplitude do intervalo	(1) 100
(2) 0,1316	(2) igual	(2) à proporção amostral	(2) 110
(3) 0,2632	(3) maior	(3) ao nível de confiança	(3) 120

10. As bolas de futebol produzidas para um campeonato mundial de futebol obedecem a regras padronizadas de fabrico e controlo de qualidade.

Admita que, num dado processo de fabrico, o raio das bolas pode ser modelado por uma variável com média 10,9 cm e desvio padrão 0,54 cm.

Selecionou-se, ao acaso, uma amostra de 81 bolas produzidas para um campeonato mundial de futebol segundo esse processo.

Determine a probabilidade de a média dos raios das bolas da amostra ser superior a 10,78 cm.

Apresente o resultado, na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Caso proceda a arredondamento nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.2.	7.	9.	Subtotal
Cotação (em pontos)	15	15	19	15	19	19	15	15	15	15	162
Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	6.1.		8.1.		8.2.		10.		Subtotal		
Cotação (em pontos)	2 x 19 pontos									38	
TOTAL											200

Prova 835

1.^a Fase