REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

EduQA Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação

# Exame Final Nacional de Matemática A

**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2026**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

**Entrelinha 1,5 sem figuras**

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

**As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.**

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área de um polígono regular:** *Semiperímetro* × *Apótema*

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ ($r$ – raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ – raio)

## Progressões

**Soma dos n primeiros termos de uma progressão:** $(u_n)$

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

## Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\,\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'\,\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

**Item obrigatório**

**1.** O João comprou oito livros distintos para ler durante as férias, sendo quatro desses livros policiais.

O João pretende ler os oito livros, um após o outro.

De quantas maneiras o pode fazer, lendo os quatro policiais seguidos?

**(A)** $5 \times 4!$

**(B)** $4! \times 4!$

**(C)** $2 \times 4! \times 4!$

**(D)** $5 \times 4! \times 4!$

**2.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - e^{3-x}(x+1) - \frac{1}{2}x^2 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{e^{x-3} - 1}{x^2 - 9} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Resolva os itens **2.1.**, **2.2.** e **2.3.** sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

**Item obrigatório**

**2.1.** Averigue se a função $f$ é contínua em $x = 3$.

**2.2.** Estude, no intervalo $]-\infty, 3[$, a função $f$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia e o(s) valor(es) de $x$ em que a função $f$ tem extremo(s) relativo(s), caso este(s) exista(m).

**2.3.** Mostre que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função $f$, de abcissa pertencente ao intervalo $]-1, 0[$, cuja ordenada é simétrica da abcissa.

**Item obrigatório**

**3.** Existem vários indicadores utilizados na monitorização de um peso saudável. Dois desses indicadores são o Índice de Massa Corporal (IMC), expresso em quilogramas por metro quadrado, e a Taxa Metabólica Basal (TMB), expressa em quilocalorias por dia.

Na Tabela 1, apresentam-se os valores do IMC e da TMB de sete mulheres. A primeira coluna diz respeito ao IMC e a segunda coluna diz respeito à TMB.

Tabela 1

| IMC | TMB |
|---|---|
| 24,6 | 1282 |
| 23,4 | 1291 |
| 23,9 | 1385 |
| 27,5 | 1513 |
| 23,6 | 1379 |
| 22,7 | 1202 |
| 31,2 | 1567 |

Ainda em relação a estas sete mulheres, estudou-se a associação entre as variáveis idade ($x$), em anos, e TMB ($y$), em quilocalorias por dia. Admita que a relação entre as variáveis $x$ e $y$ é, aproximadamente linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação $y = -9{,}02x + 1777{,}62$ , e que o quadrado do coeficiente de correlação linear, $r^2$ , é igual a $0{,}887$ .

Complete cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

A média dos valores da TMB das sete mulheres, apresentados na Tabela 1, arredondada às unidades, é ____**(a)**____ quilocalorias por dia.

**(1)** 1351

**(2)** 1374

**(3)** 1379

Relativamente à distribuição dos valores do IMC apresentados na Tabela 1, existem exatamente ____**(b)**____ mulheres com IMC pertencente ao intervalo $]Q_1, Q_3[$ , em que $Q_1$ e $Q_3$ são, respetivamente, o primeiro quartil e o terceiro quartil dessa distribuição.

**(1)** 3

**(2)** 4

**(3)** 5

Os parâmetros estimados para a reta de regressão linear, e o valor do quadrado do coeficiente de correlação linear, relativos às variáveis idade ($x$) e TMB ($y$) das sete mulheres, revelam uma correlação linear ____**(c)**____ .

**(1)** positiva forte

**(2)** fraca

**(3)** negativa forte

Considerando o modelo de regressão linear apresentado para as variáveis idade ($x$) e TMB ($y$), estima-se que uma mulher com $43$ anos terá uma TMB, arredondada às unidades, de ____**(d)**____ quilocalorias por dia.

**(1)** $1350$

**(2)** $1379$

**(3)** $1390$

**4.** Considere, em referencial o.n. $Oxyz$ do espaço, os pontos $A$ e $B$ de coordenadas $(0, 6, 4)$ e $(6, 9, 0)$, respetivamente, e a reta $r$ definida pela equação vetorial

$(x, y, z) = (2, -3, 4) + k(1, 3, 0),\ k \in \mathbb{R}$

**Item obrigatório**

**4.1.** Qual das equações seguintes define o plano perpendicular à reta $r$ e que passa no ponto $B$ ?

**(A)** $3x - y - 9 = 0$

**(B)** $x + 3y - 33 = 0$

**(C)** $6x - 2y + 27 = 0$

**(D)** $2x + 6y + 15 = 0$

**Item obrigatório**

**4.2.** Seja $\alpha$ o plano definido pela equação $3x - 4y - 1 = 0$ .

Determine uma equação da superfície esférica de centro no ponto $A$ e tangente ao plano $\alpha$ .

**5.**

---

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **5.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **5.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

**Responda apenas a um dos itens.**

---

**Item obrigatório**

**5.(AE2018)**

Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona decrescente?

**(A)** $n^2 - 4n$

**(B)** $2n + 3$

**(C)** $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

**(D)** $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

**Item obrigatório**

**5.(AE2023)**

Qual das expressões seguintes é termo geral de uma progressão geométrica cuja soma de todos os termos tem um valor finito?

**(A)** $n^2 - 4n$

**(B)** $2n + 3$

**(C)** $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

**(D)** $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

**Item obrigatório**

**6.** Um grupo de cinco pessoas, que inclui o João e a Maria, vai reunir-se numa sala equipada com uma mesa retangular e com $10$ cadeiras.

As $10$ cadeiras estão dispostas frente a frente, $5$ de cada lado da mesa. Nos topos da mesa, não há cadeiras.

Admita que, sem alterar a disposição das cadeiras, cada uma das cinco pessoas se senta, ao acaso, numa cadeira.

Determine a probabilidade de o João e a Maria se sentarem ao lado um do outro, do mesmo lado da mesa, ou um em frente ao outro, em lados opostos da mesa.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**7.** O concessionário da praia da Ilha do Pessegueiro, num determinado dia de verão, registou o número de pessoas que utilizaram guarda-sol e o número de pessoas que utilizaram para-vento, tendo concluído que:

- $75\%$ utilizaram o guarda-sol;
- $22\%$ não utilizaram o guarda-sol nem o para-vento;
- uma em cada cinco das pessoas que utilizaram o guarda-sol também utilizou o para-vento.

Selecionou-se, ao acaso, uma pessoa que, nesse dia, esteve na praia da Ilha do Pessegueiro e não utilizou o para-vento.

Determine a probabilidade de essa pessoa ter utilizado o guarda-sol.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

**8.** Considere, em referencial o.n. $Oxy$ do plano:

- a circunferência de centro na origem, $O$, e raio $1$;
- a reta $r$ de equação $y = 1$, tangente à circunferência no ponto $A$;
- o ponto $B$, pertencente à reta $r$, tal que a inclinação da reta $OB$ é $\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ponto $C$, intersecção da reta $OB$ com a circunferência, de abcissa negativa.

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão

$$\frac{\cos\alpha\,(1 + \operatorname{sen}\alpha)}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

**9.**

---

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **9.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **9.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

**Responda apenas a um dos itens.**

---

**<u>Item obrigatório</u>**

**9.(AE2018)**

Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a igualdade seguinte é verdadeira.

$$1 - \left( \operatorname{sen}\left( \frac{\pi}{2} + x \right) - \operatorname{sen} x \right)^2 = \operatorname{sen}(2x)$$

**<u>Item obrigatório</u>**

**9.(AE2023)**

Considere a função $f$, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = x^4 \ln x - 1$$

A função $f$ é contínua e tem exatamente um zero no intervalo $]1, 2[$.

Determine, utilizando o método da bissecção, uma aproximação desse zero, com um erro inferior a $0{,}1$.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

**<u>Item obrigatório</u>**

**10.** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

Qual é o quadrante a que pertence o afixo do número complexo $-i\overline{z}$?

**(A)** Primeiro

**(B)** Segundo

**(C)** Terceiro

**(D)** Quarto

**11.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número $w = \dfrac{-\sqrt{3} + i^{37}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}$ .

Determine as soluções da equação $z^2 = w$ .

Apresente as soluções na forma $a + bi$ , com $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Item obrigatório**

**12.** A Inês pretende subscrever uma conta-poupança, com a duração de $25$ anos, nas condições seguintes:

- no início de cada ano, a Inês compromete-se a depositar na conta a quantia fixa de $500$ euros;
- durante os $25$ anos, a Inês não pode fazer levantamentos nem depósitos adicionais;
- no fim de cada ano, ao capital existente na conta, é adicionado o valor do juro, calculado à taxa de juro anual de $j\,\%$ .

O capital, $C$ , em euros, existente na conta da Inês, no final dos $25$ anos, é dado, em função da taxa de juro anual, $j$ , em percentagem, por

$$C(j) = 500\left(1 + \frac{100}{j}\right)\left(\left(1 + \frac{j}{100}\right)^{25} - 1\right), \quad \text{com} \quad j > 0$$

A Inês pretende obter, no final dos $25$ anos, um acréscimo de $20\%$ relativamente ao total das quantias depositadas.

Apresente uma equação que lhe permita determinar a taxa de juro anual, em percentagem, que a Inês deverá negociar com o banco, de modo a concretizar o seu objetivo.

**13.**

---

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item **13.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O item **13.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
**Responda apenas a um dos itens.**

---

**13.(AE2018)**

Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

A soma dos quatro últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é $288\,101$ .

Determine o segundo elemento dessa linha, sabendo também que o quarto elemento da linha seguinte é $287\,980$ .

**13.(AE2023)**

Uma agência de viagens pretende organizar um passeio que inclui a visita a uma praia portuguesa.

Para escolher a praia a visitar, a agência realizou uma votação junto de $250$ dos seus clientes, de modo a saber qual destas quatro praias preferiam: praia do Almograve (A); praia do Barril (B); praia do Cabedelo (C); praia da Duquesa (D).

Ao votar, cada cliente preencheu um boletim, no qual ordenou as quatro praias, A, B, C e D, de acordo com as suas preferências (P). Cada boletim preenchido com uma certa ordenação corresponde a $1$ voto.

A Tabela 2 apresenta as preferências de $200$ desses $250$ clientes.

Tabela 2

| | **Votos** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **P** | $82$ | $24$ | $51$ | $43$ |
| **1.ª** | B | C | A | D |
| **2.ª** | A | A | D | A |
| **3.ª** | C | D | B | C |
| **4.ª** | D | B | C | B |

Os $50$ clientes restantes votaram todos numa mesma ordenação das quatro praias, colocando a praia B numa posição superior à da praia A.

Concluída a votação, aplicou-se o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada uma das praias, em função do seu lugar na ordem de preferência. Cada praia recebe:
  - quatro pontos por cada voto na 1.ª preferência;
  - três pontos por cada voto na 2.ª preferência;
  - dois pontos por cada voto na 3.ª preferência;
  - um ponto por cada voto na 4.ª preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada uma das praias, e a mais pontuada é considerada a praia preferida pelos clientes da agência de viagens.
- Em caso de empate, a tabela de preferências é reestruturada, contemplando-se, em cada coluna, apenas as praias empatadas, que ocuparão a 1.ª e a 2.ª preferências, mantendo-se a mesma ordem. A praia preferida pelos clientes da agência de viagens é a que obtiver maior número de votos na primeira preferência.

Mostre que a praia B não poderá ser a escolhida.

Na sua resposta, apresente:

- a pontuação de cada praia, resultante da aplicação do método acima descrito aos votos registados na Tabela 2;
- uma justificação para que a praia B não possa ser a escolhida, mesmo incluindo as votações possíveis dos $50$ clientes.

**Item obrigatório**

**14.** Seja $f$ uma função polinomial de grau cinco, e seja $f'$ a primeira derivada da função $f$.

Sabe-se que:

- $-1$, $0$ e $3$ são os zeros da função $f'$;
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$;
- a função $f'$ é estritamente crescente no intervalo $[3, +\infty[$.

Considere as proposições seguintes.

**I**. A função $f$ admite três extremos.

**II**. O gráfico da função $f$ tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]3, +\infty[$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

**Item obrigatório**

**15.** Considere, em referencial o.n. $Oxy$, a parábola que representa graficamente a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 1$, e a reta $s$, de equação $y = a$, com $a > -1$.

Determine, em função de $a$, o raio da circunferência que contém o vértice da parábola e os pontos de intersecção da parábola com a reta $s$.

**FIM**

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

| | |
|---|---|
| **1.** | 12 pontos |
| **2.1.** | 14 pontos |
| **3.** | 12 pontos |
| **4.1.** | 12 pontos |
| **4.2.** | 14 pontos |
| **5.** | 12 pontos |
| **6.** | 14 pontos |
| **9.** | 14 pontos |
| **10.** | 12 pontos |
| **12.** | 14 pontos |
| **14.** | 14 pontos |
| **15.** | 14 pontos |
| **Subtotal** | **158 pontos** |

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

| | |
|---|---|
| **2.2.** | 14 pontos |
| **2.3.** | 14 pontos |
| **7.** | 14 pontos |
| **8.** | 14 pontos |
| **11.** | 14 pontos |
| **13.** | 14 pontos |
| **Subtotal** | **42 pontos** |

| | |
|---|---|
| **TOTAL** | **200 pontos** |

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 635**

1.ª Fase