REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

EduQA Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2026

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

*** 1.** O João comprou oito livros distintos para ler durante as férias, sendo quatro desses livros policiais.

O João pretende ler os oito livros, um após o outro.

De quantas maneiras o pode fazer, lendo os quatro policiais seguidos?

(A) $5 \times 4!$

(B) $4! \times 4!$

(C) $2 \times 4! \times 4!$

(D) $5 \times 4! \times 4!$

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - e^{3-x}(x+1) - \frac{1}{2}x^2 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ \frac{e^{x-3} - 1}{x^2 - 9} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Resolva os itens **2.1.**, **2.2.** e **2.3.** sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

*** 2.1.** Averigue se a função f é contínua em $x = 3$.

2.2. Estude, no intervalo $]-\infty, 3[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia e o(s) valor(es) de x em que a função f tem extremo(s) relativo(s), caso este(s) exista(m).

2.3. Mostre que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função f, de abcissa pertencente ao intervalo $]-1, 0[$, cuja ordenada é simétrica da abcissa.

3. Existem vários indicadores utilizados na monitorização de um peso saudável. Dois desses indicadores são o Índice de Massa Corporal (IMC), expresso em quilogramas por metro quadrado, e a Taxa Metabólica Basal (TMB), expressa em quilocalorias por dia.

Na Tabela 1, apresentam-se os valores do IMC e da TMB de sete mulheres.

Na Figura 1, estão representados, para as variáveis idade, em anos, e TMB, em quilocalorias por dia, das sete mulheres:

- o diagrama de dispersão;
- a reta de regressão e a respetiva equação reduzida;
- o quadrado do coeficiente de correlação linear, r^2 .

Tabela 1

Mulheres	IMC (x)	TMB (y)
A	24,6	1282
B	23,4	1291
C	23,9	1385
D	27,5	1513
E	23,6	1379
F	22,7	1202
G	31,2	1567

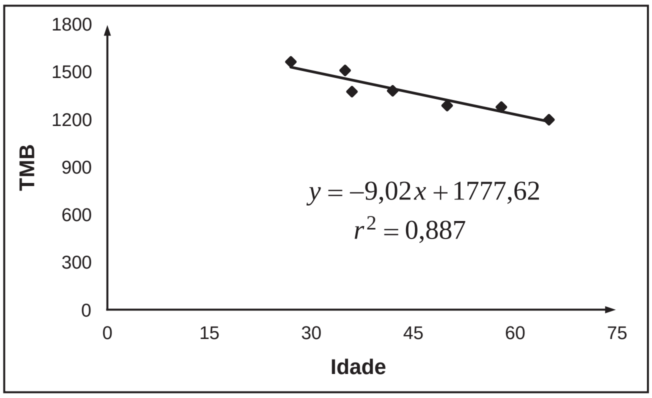

Figura 1

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

A média dos valores da TMB das sete mulheres, arredondada às unidades, é _____(a)_____ quilocalorias por dia.

Relativamente à distribuição dos valores do IMC apresentados na Tabela 1, existem exatamente _____(b)_____ mulheres com IMC pertencente ao intervalo $]Q_1, Q_3[$, em que Q_1 e Q_3 são, respetivamente, o primeiro quartil e o terceiro quartil dessa distribuição.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis apresentadas na Tabela 1 é _____(c)_____ ao coeficiente de correlação linear entre as variáveis apresentadas na Figura 1.

Relativamente às variáveis apresentadas no diagrama de dispersão, e admitindo a validade do modelo de regressão linear aí apresentado, uma mulher com 43 anos terá uma TMB aproximadamente igual a _____(d)_____ quilocalorias por dia (valor arredondado às unidades).

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 1351	**(1)** 3	**(1)** inferior	**(1)** 1350
(2) 1374	**(2)** 4	**(2)** igual	**(2)** 1379
(3) 1379	**(3)** 5	**(3)** superior	**(3)** 1390

4. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

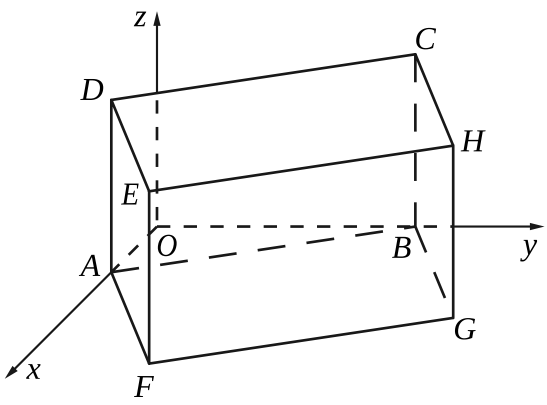

Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox, e o ponto B pertence ao eixo Oy;
- o ponto C tem coordenadas $(0, 6, 4)$, e o ponto G tem coordenadas $(6, 9, 0)$;
- a reta DH é definida pela equação $(x, y, z) = (2, -3, 4) + k(1, 3, 0),\ k \in \mathbb{R}$.

* **4.1.** Qual das equações seguintes define o plano perpendicular à reta DH e que passa no ponto G?

(A) $3x - y - 9 = 0$

(B) $x + 3y - 33 = 0$

(C) $6x - 2y + 27 = 0$

(D) $2x + 6y + 15 = 0$

* **4.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine uma equação da superfície esférica de centro no ponto A e que passa no ponto F.

5.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 5.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O **item 5.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
Responda apenas a um dos itens.

*** 5.(AE2018)**

Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona decrescente?

(A) $n^2 - 4n$ **(B)** $2n + 3$ **(C)** $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ **(D)** $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

*** 5.(AE2023)**

Qual das expressões seguintes é termo geral de uma progressão geométrica cuja soma de todos os termos tem um valor finito?

(A) $n^2 - 4n$ **(B)** $2n + 3$ **(C)** $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ **(D)** $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

*** 6.** A Margarida tem cinco pares de sapatos. Cada par de sapatos tem uma cor diferente: azul, branco, cinzento, vermelho e preto.

Para guardar os sapatos, a Margarida dispõe de uma sapateira com dez compartimentos iguais, identificados com as letras de A a J, como se ilustra na Figura 3.

Admita que a Margarida vai guardar, aleatoriamente, os cinco pares de sapatos na sapateira, um par de sapatos da mesma cor por compartimento.

Determine a probabilidade de o par de sapatos brancos e o par de sapatos pretos ficarem em compartimentos adjacentes*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

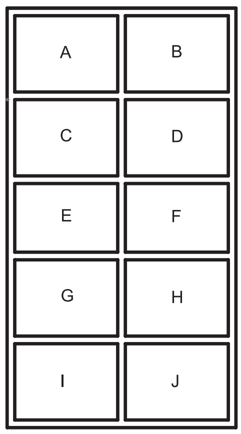

Figura 3

* Dois compartimentos dizem-se adjacentes quando partilham uma divisória física (ou quando têm um lado comum). Por exemplo, o compartimento C é adjacente aos compartimentos A, D e E.

7. O concessionário da praia da Ilha do Pessegueiro, num determinado dia de verão, registou o número de pessoas que utilizaram guarda-sol e o número de pessoas que utilizaram para-vento, tendo concluído que:

- 75% utilizaram o guarda-sol;
- 22% não utilizaram o guarda-sol nem o para-vento;
- uma em cada cinco das pessoas que utilizaram o guarda-sol também utilizou o para-vento.

Selecionou-se, ao acaso, uma pessoa que, nesse dia, esteve na praia da Ilha do Pessegueiro e não utilizou o para-vento.

Determine a probabilidade de essa pessoa ter utilizado o guarda-sol.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

8. Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro na origem, O , e raio 1 , a reta r , de equação $y = 1$, o triângulo $[BCD]$ e o ponto A .

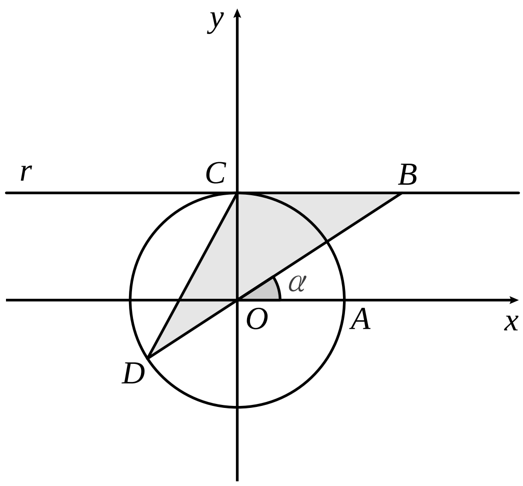

Figura 4

Sabe-se que:

- A é o ponto da circunferência que pertence ao semieixo positivo Ox ;
- C é o ponto da circunferência que pertence ao semieixo positivo Oy ;
- B é o ponto da reta r tal que a amplitude do ângulo AOB é α , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- D é o ponto da circunferência tal que o segmento de reta $[BD]$ contém um diâmetro da circunferência.

Mostre que a área do triângulo $[BCD]$ é dada pela expressão

$$\frac{\cos \alpha \, (1 + \operatorname{sen} \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 9.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O **item 9.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
Responda apenas a um dos itens.

✱ 9.(AE2018)

Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a igualdade seguinte é verdadeira.

$$1 - \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen} x\right)^2 = \operatorname{sen}(2x)$$

✱ 9.(AE2023)

Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = x^4 \ln x - 1$$

A função f é contínua e tem exatamente um zero no intervalo $]1, 2[$.

Determine, utilizando o método da bissecção, uma aproximação desse zero, com um erro inferior a $0{,}1$.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

10. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

Na Figura 5, estão representados, no primeiro quadrante do plano complexo, o ponto P, afixo de z, e outros quatro pontos, A, B, C e D.

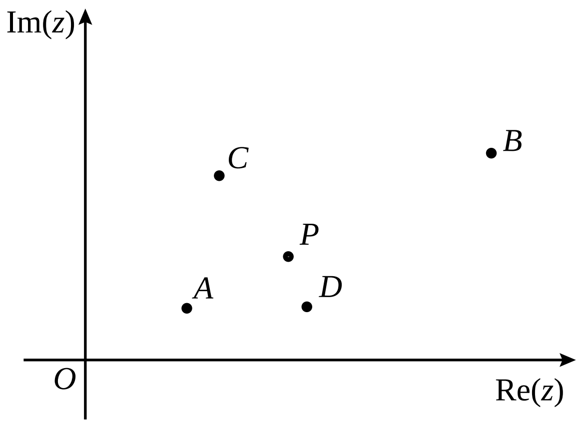

Figura 5

Qual desses quatro pontos pode ser o afixo do número complexo z^2 ?

(A) Ponto A

(B) Ponto B

(C) Ponto C

(D) Ponto D

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \dfrac{-\sqrt{3} + i^{37}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}$.

Determine as soluções da equação $z^2 = w$.

Apresente as soluções na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

★ 12. A Inês pretende subscrever uma conta-poupança, com a duração de 25 anos, nas condições seguintes:

- no início de cada ano, a Inês compromete-se a depositar na conta a quantia fixa de 500 euros;
- durante os 25 anos, a Inês não pode fazer levantamentos nem depósitos adicionais;
- no fim de cada ano, ao capital existente na conta, é adicionado o valor do juro, calculado à taxa de juro anual de $j\,\%$.

O capital, C , em euros, existente na conta da Inês, no final dos 25 anos, é dado, em função da taxa de juro anual, j , em percentagem, por

$$C(j) = 500\left(1+\frac{100}{j}\right)\left(\left(1+\frac{j}{100}\right)^{25}-1\right), \quad \text{com} \quad j>0$$

A Inês pretende obter, no final dos 25 anos, um acréscimo de 20% relativamente ao total das quantias depositadas.

Determine, recorrendo à calculadora, a taxa de juro anual, em percentagem, que a Inês deverá negociar com o banco, de modo a concretizar o seu objetivo.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

13.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 13.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.
O **item 13.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.
Responda apenas a um dos itens.

13.(AE2018)

Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

A soma dos quatro últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é $288\,101$.

Determine o segundo elemento dessa linha, sabendo também que o quarto elemento da linha seguinte é $287\,980$.

13.(AE2023)

Uma agência de viagens pretende organizar um passeio que inclui a visita a uma praia portuguesa.

Para escolher a praia a visitar, a agência realizou uma votação junto de 250 dos seus clientes, de modo a saber qual destas quatro praias preferiam: praia do Almograve (A); praia do Barril (B); praia do Cabedelo (C); praia da Duquesa (D).

Ao votar, cada cliente preencheu um boletim, no qual ordenou as quatro praias, A, B, C e D, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma certa ordenação corresponde a 1 voto.

A Tabela 2 apresenta as preferências de 200 desses 250 clientes.

Tabela 2

Votos / Preferências	82	24	51	43
1.ª	B	C	A	D
2.ª	A	A	D	A
3.ª	C	D	B	C
4.ª	D	B	C	B

Os 50 clientes restantes votaram todos numa mesma ordenação das quatro praias, colocando a praia B numa posição superior à da praia A.

Concluída a votação, aplicou-se o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada uma das praias, em função do seu lugar na ordem de preferência. Cada praia recebe:
  - quatro pontos por cada voto na 1.ª preferência;
  - três pontos por cada voto na 2.ª preferência;
  - dois pontos por cada voto na 3.ª preferência;
  - um ponto por cada voto na 4.ª preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada uma das praias, e a mais pontuada é considerada a praia preferida pelos clientes da agência de viagens.
- Em caso de empate, a tabela de preferências é reestruturada, contemplando-se, em cada coluna, apenas as praias empatadas, que ocuparão a 1.ª e a 2.ª preferências, mantendo-se a mesma ordem. A praia preferida pelos clientes da agência de viagens é a que obtiver maior número de votos na primeira preferência.

Mostre que a praia B não poderá ser a escolhida.

Na sua resposta, apresente:

- a pontuação de cada praia, resultante da aplicação do método acima descrito aos votos registados na Tabela 2;
- uma justificação para que a praia B não possa ser a escolhida, mesmo incluindo as votações possíveis dos 50 clientes.

*** 14.** Seja f uma função polinomial de grau cinco, e seja f' a primeira derivada da função f.

Na Figura 6, está representada, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função f'.

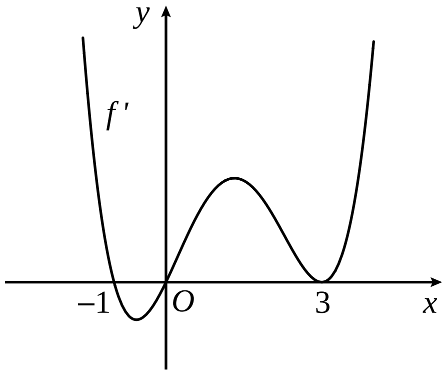

Figura 6

Sabe-se que:

- -1, 0 e 3 são os zeros da função f';
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$;
- a função f' é monótona no intervalo $[3, +\infty[$.

Considere as proposições seguintes.

I. A função f admite três extremos.

II. O gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]3, +\infty[$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

*** 15.** Considere, em referencial o.n. Oxy, a parábola que representa graficamente a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 1$, e a reta s, de equação $y = a$, com $a > -1$.

Determine, em função de a, o raio da circunferência que contém o vértice da parábola e os pontos de intersecção da parábola com a reta s.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**9.**	**10.**	**12.**	**14.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	12	14	14	12	14	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.2.**	**2.3.**	**7.**	**8.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase